blema que consiste en seleccionar, del conjunto de todas las funciones suficientemente derivables que satisfacen las condiciones de frontera, aquella que reduzca al mínimo determinada integral. Después, el tamaño del conjunto de funciones factibles se disminuye, obteniéndose así una aproximación a la solución al problema de minimización y, en consecuencia, una aproximación a la solución del problema con valor de frontera.

Para describir el método de Rayleigh-Ritz consideramos la aproximación de una solución al problema lineal con valor en frontera de dos puntos, a partir del análisis del esfuerzo de una viga. Este problema con valor en frontera se describe mediante la ecuación diferencial

$$-\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy}{dx}\right) + q(x)y = f(x), \quad \text{para } 0 \leq x \leq 1, \tag{11.21}$$

con las condiciones de frontera

$$y(0) = y(1) = 0. \tag{11.22}$$

Esta ecuación diferencial describe la deflexión $y(x)$ de la viga de longitud 1, que tiene una sección transversal variable que está representada por $q(x)$. La deflexión se debe a los esfuerzos agregados $p(x)$ y $f(x)$.

En el análisis que sigue, supondremos que $p \in C^1[0, 1]$ y que $q, f \in C[0, 1]$. Más aún, supondremos que existe una constante $\delta > 0$ tal que

$$p(x) \geq \delta, \quad \text{tal que } q(x) \geq 0, \quad \text{para cada } x \text{ en } [0, 1].$$

Las suposiciones anteriores son suficientes para garantizar que el problema con valor en frontera de (11.22) y (11.23) tiene una solución única (véase [BSW]).

Como en el caso de los problemas con valor en frontera que describen fenómenos físicos, la solución a la ecuación de la viga satisface la propiedad **variacional**. En el caso de la ecuación de la viga, el principio variacional resulta indispensable para desarrollar el método de Rayleigh-Ritz y caracteriza la solución de esa ecuación como la función que reduce al mínimo cierta integral sobre las funciones en $C_0^2[0, 1]$, el conjunto de esas funciones u en $C^2[0, 1]$ con la propiedad de que $u(0) = u(1) = 0$. El siguiente teorema establece la caracterización.

Teorema 11.4 Sea $p \in C^1[0, 1]$, $q, f \in C[0, 1]$, y

$$p(x) \geq \delta > 0, \quad q(x) \geq 0, \quad \text{para } 0 \leq x \leq 1.$$

La función $y \in C_0^2[0, 1]$ es la solución única de la ecuación diferencial

$$-\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy}{dx}\right) + q(x)y = f(x), \quad \text{para } 0 \leq x \leq 1, \tag{11.23}$$

si y sólo si y es la función única en $C_0^2[0, 1]$ que reduce al mínimo la integral

$$I[u] = \int_0^1 \{p(x)[u'(x)]^2 + q(x)[u(x)]^2 - 2f(x)u(x)\}\, dx. \tag{11.24}$$

■

Los detalles de esta demostración aparecen en [Shul, páginas 88-89]. La demostración consta de tres pasos. Primero se demuestra que cualquier solución y de (11.24) satisface tambien la ecuación

$$\int_0^1 f(x)u(x)dx = \int_0^1 p(x)\,\frac{dy}{dx}(x)\,\frac{du}{dx}(x) + q(x)y(x)u(x)dx, \tag{11.25}$$

para cada $u \in C_0^2[0, 1]$.

En el segundo paso se muestra que $y \in C_0^2[0, 1]$ es una solución de (11.25) si y sólo si (11.26) se cumple para cada $u \in C_0^2[0, 1]$.

En el último paso se demuestra que (11.26) tiene una única solución, la que además será solución de (11.25) y de (11.24), de modo que las soluciones de (11.24) y (11.25) son idénticas.

Reduciendo al mínimo la integral, el método de Rayleigh-Ritz aproxima la solución y, no sobre todas las funciones en $C_0^2[0, 1]$, sino sobre un conjunto más pequeño de las que contienen combinaciones lineales de ciertas funciones básicas $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n$. Las funciones básicas son linealmente independientes y satisfacen

$$\phi_i(0) = \phi_i(1) = 0, \quad \text{para cada } i = 1, 2, \ldots, n.$$

Después de encontrar las constantes $c_1, c_2, \ldots, c_n$ que reducen al mínimo $I[\sum_{i=1}^n c_i\phi_i]$, se obtiene una aproximación $\phi(x) = \sum_{i=1}^n c_i\phi_i(x)$ a la solución $y(x)$ de la ecuación (11.24).

Conforme a la ecuación (11.25),

$$\begin{aligned} I[\phi] &= I\left[\sum_{i=1}^n c_i\phi_i\right] \qquad (11.26)\\ &= \int_0^1 \left\{p(x)\left[\sum_{i=1}^n c_i\phi_i'(x)\right]^2 + q(x)\left[\sum_{i=1}^n c_i\phi_i(x)\right]^2 - 2f(x)\sum_{i=1}^n c_i\phi_i(x)\right\} dx, \end{aligned}$$

y cuando se considera I como una función de $c_1, c_2, \ldots, c_n$ para que ocurra un mínimo es necesario tener

$$\frac{\partial I}{\partial c_j} = 0, \quad \text{para cada } j = 1, 2, \ldots, n. \tag{11.27}$$

Al derivar (11.26) se obtiene

$$\frac{\partial I}{\partial c_j} = \int_0^1 \left\{2p(x)\sum_{i=1}^n c_i\phi_i'(x)\,\phi_j'(x) + 2q(x)\sum_{i=1}^n c_i\phi_i(x)\phi_j(x) - 2f(x)\phi_j(x)\right\} dx,$$

y al sustituir en la ecuación (11.27) se obtiene

$$0 = \sum_{i=1}^n \left[\int_0^1 \{p(x)\phi_i'(x)\phi_j'(x) + q(x)\phi_i(x)\phi_j(x)\}\,dx\right] c_i - \int_0^1 f(x)\phi_j(x)\,dx, \tag{11.28}$$

para toda $j = 1, 2, \ldots, n$.

Las ecuaciones descritas en la ecuación 11.28 dan como resultado un sistema lineal de $n \times n$, $A\mathbf{c} = \mathbf{b}$ en las variables $c_1, c_2, \ldots, c_n$, donde la matriz simétrica A está dada por

$$a_{ij} = \int_0^1 [p(x)\phi_i'(x)\phi_j'(x) + q(x)\phi_i(x)\phi_j(x)]\,dx,$$

y **b** se define por medio de

$$b_i = \int_0^1 f(x)\phi_i(x)\, dx.$$

La elección más elemental de las funciones básicas requiere la intervención de polinomios lineales seccionados. El primer paso consiste en formar una partición de $[0, 1]$ al escoger los puntos $x_0, x_1, \ldots, x_{n+1}$ con

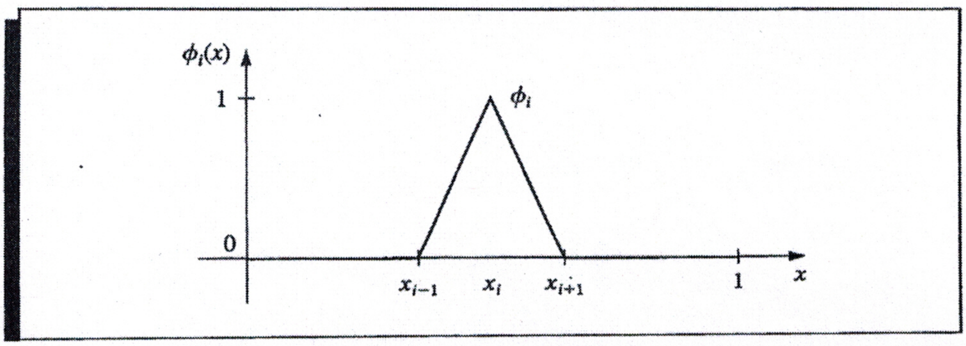
$$0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n < x_{n+1} = 1.$$

Al utilizar $h_i = x_{i+1} - x_i$, para toda $i = 0, 1, \ldots, n$, definimos las funciones básicas $\phi_1(x)$, $\phi_2(x), \ldots, \phi_n(x)$ mediante

$$\phi_i(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } 0 \le x \le x_{i-1}, \\ \dfrac{1}{h_{i-1}}(x - x_{i-1}) & \text{si } x_{i-1} < x \le x_i, \\ \dfrac{1}{h_i}(x_{i+1} - x), & \text{si } x_i < x \le x_{i+1}, \\ 0, & \text{si } x_{i+1} < x \le 1, \end{cases} \tag{11.29}$$

para toda $i = 1, 2, \ldots, n$. (Véase la Fig. 11.4.)

Figura 11.4



Las funciones ϕ_i son lineales y seccionadas; por ello, aunque las derivadas ϕ_i' no son continuas, son constantes en el subintervalo abierto (x_j, x_{j+1}) para toda $j = 0, 1, \ldots, n$. Por tanto, tenemos

$$\phi_i'(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } 0 < x < x_{i-1}, \\ \dfrac{1}{h_{i-1}}, & \text{si } x_{i-1} < x < x_i, \\ -\dfrac{1}{h_i}, & \text{si } x_i < x < x_{i+1}, \\ 0, & \text{si } x_{i+1} < x < 1, \end{cases} \tag{11.30}$$

para toda $i = 1, 2, \ldots, n$.

Como ϕ_i y ϕ_i' son distintos de cero sólo en (x_{i-1}, x_{i+1}),

$$\phi_i(x)\,\phi_j(x) \equiv 0 \quad \text{y} \quad \phi_i'(x)\,\phi_j'(x) \equiv 0,$$

excepto cuando j es $i-1$, i, o $i+1$. En consecuencia, el sistema lineal dado por (11.29) se reduce a un sistema lineal tridiagonal de $n \times n$. Los elementos distintos de cero de A son

$$a_{ij} = \int_0^1 \left\{p(x)[\phi_i'(x)]^2 + q(x)[\phi_i(x)]^2\right\} dx$$

$$= \left(\frac{1}{h_{i-1}}\right)^2 \int_{x_{i-1}}^{x_i} p(x)\,dx + \left(\frac{-1}{h_i}\right)^2 \int_{x_i}^{x_{i+1}} p(x)\,dx$$

$$+ \left(\frac{1}{h_{i-1}}\right)^2 \int_{x_{i-1}}^{x_i} (x-x_{i-1})^2\,q(x)\,dx + \left(\frac{1}{h_i}\right)^2 \int_{x_i}^{x_{i+1}} (x_{i+1}-x)^2\,q(x)\,dx,$$

para toda $i = 1, 2, \ldots, n$;

$$a_{i,i+1} = \int_0^1 \{p(x)\phi_i'(x)\phi_{i+1}'(x) + q(x)\phi_i(x)\phi_{i+1}(x)\}\,dx$$

$$= -\left(\frac{1}{h_i}\right)^2 \int_{x_i}^{x_{i+1}} p(x)\,dx + \left(\frac{1}{h_i}\right)^2 \int_{x_i}^{x_{i+1}} (x_{i+1}-x)(x-x_i)q(x)\,dx,$$

para toda $i = 1, 2, \ldots, n-1$; y

$$a_{i,i-1} = \int_0^1 \{p(x)\phi_i'(x)\phi_{i-1}'(x) + q(x)\phi_i(x)\phi_{i-1}(x)\}\,dx$$

$$= -\left(\frac{1}{h_{i-1}}\right)^2 \int_{x_{i-1}}^{x_i} p(x)\,dx + \left(\frac{1}{h_{i-1}}\right)^2 \int_{x_{i-1}}^{x_i} (x_i-x)(x-x_{i-1})q(x)\,dx,$$

para cada $i = 1, 2, \ldots, n$. Las entradas en $\mathbf{b}$ son

$$b_i = \int_0^1 f(x)\phi_i(x)dx = \frac{1}{h_{i-1}} \int_{x_{i-1}}^{x_i} (x-x_{i-1})f(x)\,dx + \frac{1}{h_i}\int_{x_i}^{x_{i+1}} (x_{i+1}-x)f(x)\,dx,$$

para toda $i = 1, 2, \ldots, n$.

Hay seis tipos de integrales a evaluar:

$$Q_{1,i} = \left(\frac{1}{h_i}\right)^2 \int_{x_i}^{x_{i+1}} (x_{i+1}-x)\,(x-x_i)q(x)\,dx, \quad \text{para cada } i = 1, 2, \ldots, n-1,$$

$$Q_{2,i} = \left(\frac{1}{h_{i-1}}\right)^2 \int_{x_{i-1}}^{x_i} (x-x_{i-1})^2\,q(x)\,dx, \quad \text{para cada } i = 1, 2, \ldots, n,$$

$$Q_{3,i} = \left(\frac{1}{h_i}\right)^2 \int_{x_i}^{x_{i+1}} (x_{i+1}-x)^2\,q(x)\,dx, \quad \text{para cada } i = 1, 2, \ldots, n,$$

$$Q_{4,i} = \left(\frac{1}{h_{i-1}}\right)^2 \int_{x_{i-1}}^{x_i} p(x)\,dx, \quad \text{para cada } i = 1, 2, \ldots, n+1,$$

$$Q_{5,i} = \frac{1}{h_{i-1}} \int_{x_{i-1}}^{x_i} (x - x_{i-1}) f(x)\,dx, \quad \text{para cada } i = 1, 2, \ldots, n,$$

y

$$Q_{6,i} = \frac{1}{h_i} \int_{x_i}^{x_{i+1}} (x_{i+1} - x) f(x)\,dx, \quad \text{para cada } i = 1, 2, \ldots, n.$$

La matriz A y el vector $\mathbf{b}$ del sistema lineal $A\mathbf{c} = \mathbf{b}$ contienen los elementos

$$\begin{aligned} a_{i,i} &= Q_{4,i} + Q_{4,i+1} + Q_{2,i} + Q_{3,i}, \quad \text{para cada } i = 1, 2, \ldots, n, \\ a_{i,i+1} &= -Q_{4,i+1} + Q_{1,i}, \quad \text{para cada } i = 1, 2, \ldots, n-1, \\ a_{i,i-1} &= -Q_{4,i} + Q_{1,i-1}, \quad \text{para cada } i = 2, 3, \ldots, n, \end{aligned}$$

y

$$b_i = Q_{5,i} + Q_{6,i}, \quad \text{para cada } i = 1, 2, \ldots, n.$$

Los elementos de $\mathbf{c}$ son los coeficientes desconocidos $c_1, c_2, \ldots, c_n$, a partir de los cuales se construye la aproximación de Rayleigh-Ritz ϕ, dada por $\phi(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i\phi_i(x)$.

Una dificultad práctica de este método es la necesidad de evaluar las $6n$ integrales. Pueden evaluarse directamente o mediante una fórmula de cuadratura, como el método de Simpson. Un método alternativo para la evaluación de la integral consiste en aproximar las funciones p, q y f con su polinomio interpolante lineal seccionado, e integrar luego la aproximación. Supongamos, por ejemplo, la integral $Q_{1,i}$. La interpolación lineal segmentaria de q es

$$P_q(x) = \sum_{i=0}^{n+1} q(x_i)\phi_i(x),$$

donde $\phi_1, \ldots, \phi_n$ se definen en (11.30) y

$$\phi_0(x) = \begin{cases} \dfrac{x_1 - x}{x_1}, & \text{si } 0 \le x \le x_1 \\ 0, & \text{en otra parte} \end{cases} \quad \text{y} \quad \phi_{n+1}(x) = \begin{cases} \dfrac{x - x_n}{1 - x_n}, & \text{si } x_n \le x \le 1 \\ 0, & \text{en otra parte.} \end{cases}$$

Dado que el intervalo de integración es $[x_i, x_{i+1}]$, $P_q(x)$ se reduce a

$$P_q(x) = q(x_i)\phi_i(x) + q(x_{i+1})\phi_{i+1}(x).$$

Este es el polinomio interpolante de primer grado que estudiamos en la sección 3.1. De acuerdo con el teorema 3.3,

$$|q(x) - P_q(x)| = O(h_i^2), \quad \text{para } x_i \le x \le x_{i+1},$$

si $q \in C^2[x_i, x_{i+1}]$. Para toda $i = 1, 2, \ldots, n-1$, la aproximación a $Q_{1,i}$ se obtiene al integrar la aproximación al integrando

$$Q_{1,i} = \left(\frac{1}{h_i}\right)^2 \int_{x_i}^{x_{i+1}} (x_{i+1} - x)(x - x_i) q(x)\, dx$$

$$\approx \left(\frac{1}{h_i}\right)^2 \int_{x_i}^{x_{i+1}} (x_{i+1} - x)(x - x_i) \left[\frac{q(x_i)(x_{i+1} - x)}{h_i} + \frac{q(x_{i+1})(x - x_i)}{h_i}\right] dx$$

$$= \frac{h_i}{12}[q(x_i) + q(x_{i+1})].$$

Más aún, si $q \in C^2[x_i, x_{i+1}]$, entonces

$$\left| Q_{1,i} - \frac{h_i}{12}[q(x_i) + q(x_{i+1})] \right| = O(h_i^3).$$

Las aproximaciones a las otras integrales se derivan de manera parecida y están dadas por

$$Q_{2,i} \approx \frac{h_{i-1}}{12}[3q(x_i) + q(x_{i-1})], \qquad Q_{3,i} \approx \frac{h_i}{12}[3q(x_i) + q(x_{i+1})],$$

$$Q_{4,i} \approx \frac{h_{i-1}}{2}[p(x_i) + p(x_{i-1})], \qquad Q_{5,i} \approx \frac{h_{i-1}}{6}[2f(x_i) + f(x_{i-1})],$$

y

$$Q_{6,i} \approx \frac{h_i}{6}[2f(x_i) + f(x_{i+1})].$$

En el algoritmo 11.5 se establece el sistema lineal tridiagonal, y se incorpora el algoritmo 6.7 de factorización de Crout para resolver el sistema. Las integrales $Q_{1,i}, \ldots, Q_{6,i}$ pueden calcularse mediante uno de los métodos antes mencionados.

ALGORITMO 11.5

Método lineal segmentario de Rayleigh-Ritz

Para aproximar la solución al problema con valor en frontera

$$-\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy}{dx}\right) + q(x)y = f(x), \quad 0 \le x \le 1, \quad y(0) = y(1) = 0,$$

con la función lineal segmentaria

$$\phi(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i \phi_i(x):$$

ENTRADA entero $n \ge 1$; puntos $x_0 = 0 < x_1 < \cdots < x_n < x_{n+1} = 1$.

SALIDA coeficientes $c_1, \ldots, c_n$.

Paso 1 Para $i = 0, \ldots, n$, tome $h_i = x_{i+1} - x_i$.