

Aproximación de soluciones de e.d.o. mediante minimización de funcionales.

Se enuncia el teorema que constituye la base del método de Raleigh Ritz, método que se describirá al final del curso. Usaremos este teorema para mostrar algunos métodos variacionales.

11.5 El método de Rayleigh-Ritz

El método del disparo para aproximar la solución de un problema de valor de frontera sustituyó dicho problema con un par de problemas de valor inicial. El enfoque de diferencia finita reemplaza la operación continua de diferenciación con la operación discreta de diferencias finitas. El método Rayleigh-Ritz es una variante que aborda el problema desde una tercera perspectiva. Primero se reformula el problema con valor de frontera como un pro-

blema que consiste en seleccionar, del conjunto de todas las funciones suficientemente derivables que satisfacen las condiciones de frontera, aquella que reduzca al mínimo determinada integral. Después, el tamaño del conjunto de funciones factibles se disminuye, obteniéndose así una aproximación a la solución al problema de minimización y, en consecuencia, una aproximación a la solución del problema con valor de frontera.

Para describir el método de Rayleigh-Ritz consideramos la aproximación de una solución al problema lineal con valor en frontera de dos puntos, a partir del análisis del esfuerzo de una viga. Este problema con valor en frontera se describe mediante la ecuación diferencial

$$-\frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{dy}{dx} \right) + q(x)y = f(x), \quad \text{para } 0 \leq x \leq 1, \quad (11.21)$$

con las condiciones de frontera

$$y(0) = y(1) = 0. \quad (11.22)$$

Esta ecuación diferencial describe la deflexión $y(x)$ de la viga de longitud 1, que tiene una sección transversal variable que está representada por $q(x)$. La deflexión se debe a los esfuerzos agregados $p(x)$ y $f(x)$.

En el análisis que sigue, supondremos que $p \in C^1[0, 1]$ y que $q, f \in C[0, 1]$. Más aún, supondremos que existe una constante $\delta > 0$ tal que

$$p(x) \geq \delta, \quad \text{tal que } q(x) \geq 0, \quad \text{para cada } x \text{ en } [0, 1].$$

Las suposiciones anteriores son suficientes para garantizar que el problema con valor en frontera de (11.22) y (11.23) tiene una solución única (véase [BSW]).

Como en el caso de los problemas con valor en frontera que describen fenómenos físicos, la solución a la ecuación de la viga satisface la propiedad **variacional**. En el caso de la ecuación de la viga, el principio variacional resulta indispensable para desarrollar el método de Rayleigh-Ritz y caracteriza la solución de esa ecuación como la función que reduce al mínimo cierta integral sobre las funciones en $C_0^2[0, 1]$, el conjunto de esas funciones u en $C^2[0, 1]$ con la propiedad de que $u(0) = u(1) = 0$. El siguiente teorema establece la caracterización.

Teorema 11.4 Sea $p \in C^1[0, 1]$, $q, f \in C[0, 1]$, y

$$p(x) \geq \delta > 0, \quad q(x) \geq 0, \quad \text{para } 0 \leq x \leq 1.$$

La función $y \in C_0^2[0, 1]$ es la solución única de la ecuación diferencial

$$-\frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{dy}{dx} \right) + q(x)y = f(x), \quad \text{para } 0 \leq x \leq 1, \quad (11.23)$$

si y sólo si y es la función única en $C_0^2[0, 1]$ que reduce al mínimo la integral

$$I[u] = \int_0^1 \{p(x)[u'(x)]^2 + q(x)[u(x)]^2 - 2f(x)u(x)\} dx. \quad (11.24)$$

■

Bibliografía: - Análisis Numérico de Burden y Faires

- Capitulo 1 y 2 de Elementos finitos aplicados de Larry Segerlind.

EJERCICIOS 1 A)

1. Use el algoritmo lineal seccionado para aproximar la solución al problema con valor de frontera

$$y'' + \frac{\pi^2}{4} y = \frac{\pi^2}{16} \cos \frac{\pi}{4} x, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad y(0) = y(1) = 0$$

usando $x_0 = 0, x_1 = 0.3, x_2 = 0.7, x_3 = 1$ y después compare los resultados con la solución real $y(x) = -\frac{1}{3} \cos \frac{\pi}{2} x - \frac{\sqrt{2}}{6} \sin \frac{\pi}{2} x + \frac{1}{3} \cos \frac{\pi}{4} x$.

2. Use el algoritmo lineal seccionado para aproximar la solución al problema con valor de frontera,

$$-\frac{d}{dx} (xy') + 4y = 4x^2 - 8x + 1, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad y(0) = y(1) = 0$$

usando $x_0 = 0, x_1 = 0.4, x_2 = 0.8, x_3 = 1$ y después compare los resultados con la solución real $y(x) = x^2 - x$.

3. Use el algoritmo lineal seccionado para aproximar las soluciones a los siguientes problemas con valor de frontera y después compare los resultados con la solución real:

a. $-x^2 y'' - 2xy' + 2y = -4x^2, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad y(0) = y(1) = 0$; use $h = 0.1$; solución real $y(x) = x^2 - x$.

b. $-\frac{d}{dx} (e^x y') + e^x y = x + (2 - x)e^x, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad y(0) = y(1) = 0$; use $h = 0.1$;
solución real $y(x) = (x - 1)(e^{-x} - 1)$.

c. $-\frac{d}{dx} (e^{-x} y') + e^{-x} y = (x - 1) - (x + 1)e^{-(x-1)}, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad y(0) = y(1) = 0$; use $h = 0.05$; solución real $y(x) = x(e^x - e)$.

d. $-(x + 1)y'' - y' + (x + 2)y = [2 - (x + 1)^2]e \ln 2 - 2e^x, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad y(0) = y(1) = 0$; use $h = 0.05$; solución real $y(x) = e^x \ln(x + 1) - (e \ln 2)x$.

4. Use el algoritmo de trazador cúbico con $n = 3$ para aproximar la solución a los siguientes problemas con valor de frontera. Después, compare los resultados con las soluciones reales que se dan en los ejercicios 1 y 2:

a. $y'' + \frac{\pi^2}{4} y = \frac{\pi^2}{16} \cos \frac{\pi}{4} x, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad y(0) = 0, y(1) = 0$

b. $-\frac{d}{dx} (xy') + 4y = 4x^2 - 8x + 1, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad y(0) = 0, y(1) = 0$

B)

6. Demuestre que el problema con valor de frontera

$$-\frac{d}{dx}(p(x)y') + q(x)y = f(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad y(0) = \alpha, \quad y(1) = \beta,$$

puede transformarse con un cambio de variable

$$z = y - \beta x - (1 - x)\alpha$$

en la forma

$$-\frac{d}{dx}(p(x)z') + q(x)z = F(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad z(0) = 0, \quad z(1) = 0.$$

7. Use el ejercicio 6 y el algoritmo lineal seccionado con $n = 9$ para aproximar la solución al problema de valor de frontera

$$-y'' + y = x, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad y(0) = 1, \quad y(1) = 1 + e^{-1}.$$

En los problemas anteriores compruebe las soluciones y haga los cambios de variables.

En lo que sigue se usa el Teorema 11.4 para obtener la ecuación 1.10 :

FORMULACIONES INTEGRAL DE SOLUCIÓN NUMÉRICA

El objetivo inmediato es ilustrar cómo cada uno de los métodos integrales discutidos en la sección anterior se puede utilizar para obtener una solución aproximada para un problema físico. El ejemplo es una viga simplemente apoyada sometida a momentos concentrados en cada extremo. La viga y su diagrama de momento de flexión se muestran en la Figura 1.1. La ecuación diferencial que gobierna es

$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} - M_0 = 0 \quad (1.6)$$

$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} - M(x) = 0 \quad (1.6)$$

Con las condiciones de contorno

$$y(0) = 0 \quad \text{and} \quad y(H) = 0 \quad (1.7)$$

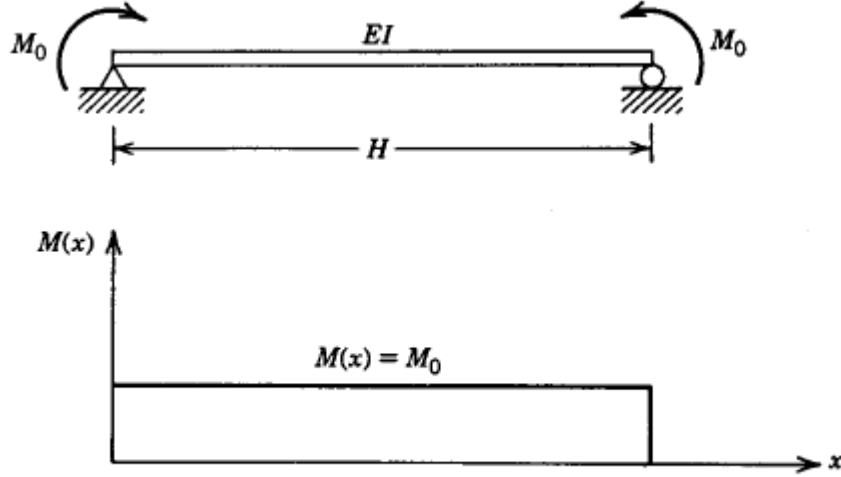


Figure 1.1. A simply supported beam with concentrated end moments.

El coeficiente EI representa la resistencia de la viga a la flexión y $M(x)$ es la ecuación de momento de flexión. En este ejemplo, $M(x)$ tiene el valor constante M_0 . Una solución aproximada para la deflexión del haz se define como

$$y(x) = A \sin \frac{\pi x}{H} \quad (1.8)$$

donde A es un coeficiente indeterminado. Esta solución es un candidato aceptable porque satisface las condiciones límites $y(0) = y(H) = 0$ y tiene una forma similar a la curva de deflexión esperada, la llamaremos solución de prueba (ó función test).

Es fácil comprobar que la solución analítica (exacta) de la ecuación diferencial es

$$y(x) = \frac{M_0 x}{2EI} (x - H) \quad (1.9)$$

Usando el Teorema 11.4 en el problema definido por 1.6 y 1.7 se obtiene a minimizar la

integral $\int_0^H \left\{ EI \left[\frac{dy}{dx} \right]^2 + 2M_0 y \right\} dx$ ó lo que es equivalente minimizar Π dado por

$$\Pi = \int_0^H \left[\frac{EI}{2} \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 + M_0 y \right] dx \quad (1.10)$$

El valor de A que hace (1,8) la mejor aproximación a la curva de deflexión es el valor que hace a Π un mínimo. Para evaluar A , Π debe ser escrito como una función de A y luego se reducen al mínimo derivando con respecto a A . Observando que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{A\pi}{H} \cos \frac{\pi x}{H}$$

we find that Π becomes

$$\Pi = \int_0^H \left[\frac{EI}{2} \left(\frac{A\pi}{H} \cos \frac{\pi x}{H} \right)^2 + M_0 A \sin \frac{\pi x}{H} \right] dx$$

or

$$\Pi = \left(\frac{EI\pi^2}{4H} \right) A^2 + \left(\frac{2M_0 H}{\pi} \right) A \quad (1.11)$$

Minimizing Π yields

$$\frac{\partial \Pi}{\partial A} = 2 \left(\frac{EI\pi^2}{4H} \right) A + \frac{2M_0 H}{\pi} = 0$$

and

$$A = - \frac{4M_0 H^2}{\pi^3 EI} \quad (1.12)$$

The approximate solution is

$$y(x) = - \frac{4M_0 H^2}{\pi^3 EI} \sin \frac{\pi x}{H} \quad (1.13)$$

PROBLEMAS

1.1-1.5 Obtener una solución aproximada para el desplazamiento de una viga simplemente apoyada de longitud H y coeficiente EI mostrada en la Figura P1.1. Suponga que la función de prueba del desplazamiento tiene por ecuación $y(x) = A \sin(\pi x / H)$.

Compare la deflexión en el centro con el valor teórico $y = \frac{-5WH^4}{384EI}$.

La ecuación diferencial que gobierna es

$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{Wx(H-x)}{2} = 0$$

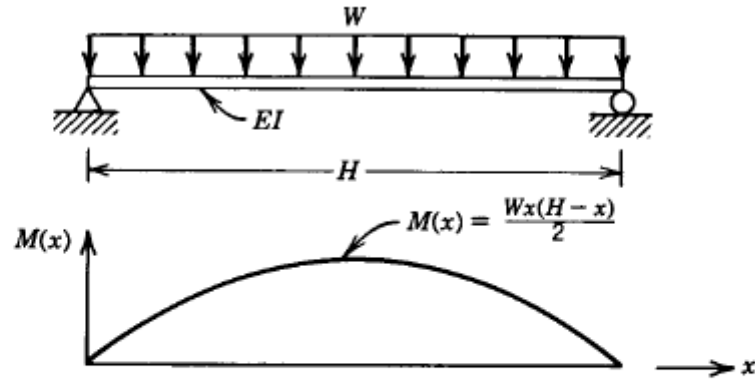


Figure P1.1

1.1 Evaluate A by minimizing the integral

$$\Pi = \int_0^H \left[\frac{EI}{2} \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 + \left(\frac{Wx(H-x)}{2} \right) y \right] dx$$

1.6-1.9 Obtener una ecuación desplazamiento aproximado para la viga simplemente apoyada muestra en la Figura P1.6 utilizando la solución de prueba $y(x) = A \sin \pi x/H$. Compare la deflexión en el centro y con el valor teórico $y = -0.06415 M_0 H^2/EI$. La ecuación diferencial que gobierna es

$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{M_0 x}{H} = 0$$

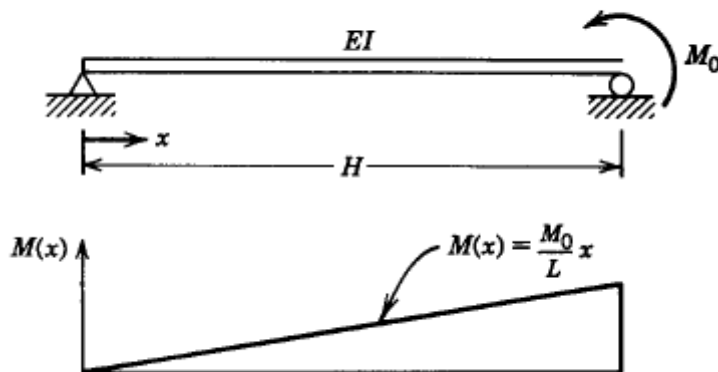


Figure P1.6

1.6 Calcule A minimizando la integral

$$\Pi = \int_0^H \left[\frac{EI}{2} \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 + \frac{M_0 x}{H} y \right] dx$$

DIFERENCIAS FINITAS APLICADAS A EDO.

11.3 Métodos de diferencias finitas para los problemas lineales

El método de diferencias finitas para el problema de valor de frontera de segundo orden,

$$y'' = p(x)y' + q(x)y + r(x), \quad a \leq x \leq b, \quad y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta, \quad (11.14)$$

requiere utilizar las aproximaciones del cociente de diferencias para aproximar tanto a y' como a y'' . Primero, seleccionamos un entero $N > 0$ y dividimos el intervalo $[a, b]$ en $(N + 1)$ subintervalos iguales cuyos extremos son los puntos de malla $x_i = a + ih$, para $i = 0, 1, \dots, N + 1$, donde $h = (b - a)/(N + 1)$. Al escoger h de este modo, se facilita la aplicación de un algoritmo matricial explicado en el capítulo 6, con el cual se resuelve un sistema lineal que contenga una matriz de $N \times N$.

En los puntos de red del interior, x_i , para $i = 1, 2, \dots, N$, la ecuación diferencial a aproximar es

$$y''(x_i) = p(x_i) y'(x_i) + q(x_i)y(x_i) + r(x_i). \quad (11.15)$$

Al desarrollar y en el tercer polinomio de Taylor alrededor de x_i evaluada en x_{i+1} y x_{i-1} , tenemos, suponiendo que $y \in C^4 [x_{i-1}, x_{i+1}]$,

$$y(x_{i+1}) = y(x_i + h) = y(x_i) + hy'(x_i) + \frac{h^2}{2} y''(x_i) + \frac{h^3}{6} y'''(x_i) + \frac{h^4}{24} y^{(4)}(\xi_i^+),$$

para alguna ξ_i^+ en (x_i, x_{i+1}) , y

$$y(x_{i-1}) = y(x_i - h) = y(x_i) - hy'(x_i) + \frac{h^2}{2} y''(x_i) - \frac{h^3}{6} y'''(x_i) + \frac{h^4}{24} y^{(4)}(\xi_i^-),$$

para alguna ξ_i^- en (x_{i-1}, x_i) , si se suman estas ecuaciones, tenemos

$$y(x_{i+1}) + y(x_{i-1}) = 2y(x_i) + h^2 y''(x_i) + \frac{h^4}{24} [y^{(4)}(\xi_i^+) + y^{(4)}(\xi_i^-)],$$

y al despejar $y''(x_i)$ se obtiene

$$y''(x_i) + \frac{1}{h^2} [y(x_{i+1}) - 2y(x_i) + y(x_{i-1})] = \frac{h^2}{24} [y^{(4)}(\xi_i^+) + y^{(4)}(\xi_i^-)].$$

Así $y''(x_i) \approx \frac{y(x_i + h) - 2y(x_i) + y(x_i - h)}{h^2} = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2}$ De manera

parecida $y'(x_i) \approx \frac{y(x_i + h) - y(x_i - h)}{2h} = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}$

1. El problema con valor de frontera

$$y'' = 4(y - x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 2$$

tiene la solución $y(x) = e^2(e^4 - 1)^{-1}(e^{2x} - e^{-2x}) + x$. Use el algoritmo lineal de diferencias finitas para aproximar la solución, y después compare los resultados con la solución real.

- a. Con $h = \frac{1}{2}$; b. Con $h = \frac{1}{4}$.
c. Extrapole para aproximar $y(1/2)$.

2. El problema con valor de frontera

$$y'' = y' + 2y + \cos x, \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \quad y(0) = -0.3, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = -0.1$$

tiene la solución $y(x) = -\frac{1}{10}(\sin x + 3 \cos x)$. Use el algoritmo lineal de diferencias finitas para aproximar la solución, y después compare los resultados con la solución real.

- a. Con $h = \frac{\pi}{4}$; b. Con $h = \frac{\pi}{8}$.
c. Extrapole para aproximar $y(\pi/4)$.

3. Use el algoritmo lineal de diferencias finitas para aproximar la solución a los siguientes problemas con valor de frontera.

- a. $y'' = -3y' + 2y + 2x + 3$, $0 \leq x \leq 1$, $y(0) = 2$, $y(1) = 1$; use $h = 0.1$.
b. $y'' = -\frac{4}{x}y' + \frac{2}{x^2}y - \frac{2}{x^2}\ln x$, $1 \leq x \leq 2$, $y(1) = -\frac{1}{2}$, $y(2) = \ln 2$; use $h = 0.05$.
c. $y'' = -(x+1)y' + 2y + (1-x^2)e^{-x}$, $0 \leq x \leq 1$, $y(0) = -1$, $y(1) = 0$; use $h = 0.1$.
d. $y'' = \frac{y'}{x} + \frac{3}{x^2}y + \frac{\ln x}{x} - 1$, $1 \leq x \leq 2$, $y(1) = y(2) = 0$; use $h = 0.1$.

4. Aunque $q(x) < 0$ en los siguientes problemas con valor de frontera, existen soluciones únicas y se dan. Use el algoritmo lineal de diferencias finitas para aproximar las soluciones, y después compare los resultados con las soluciones reales.

- a. $y'' + y = 0$, $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$, $y(0) = 1$, $y(\frac{\pi}{4}) = 1$; use $h = \frac{\pi}{20}$; solución real $y(x) = \cos x + (\sqrt{2} - 1) \sin x$.
b. $y'' + 4y = \cos x$, $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$, $y(0) = 0$, $y(\frac{\pi}{4}) = 0$; use $h = \frac{\pi}{20}$; solución real $y(x) = -\frac{1}{3} \cos 2x - \frac{\sqrt{2}}{6} \sin 2x + \frac{1}{3} \cos x$.
c. $y'' = -\frac{4}{x}y' - \frac{2}{x^2}y + \frac{2\ln x}{x^2}$, $1 \leq x \leq 2$, $y(1) = \frac{1}{2}$, $y(2) = \ln 2$; use $h = 0.05$; solución real $y(x) = \frac{4}{x} - \frac{2}{x^2} + \ln x - \frac{3}{2}$.
d. $y'' = 2y' - y + xe^x - x$, $0 \leq x \leq 2$, $y(0) = 0$, $y(2) = -4$; use $h = 0.2$; solución real $y(x) = \frac{1}{6}x^3e^x - \frac{5}{3}xe^x + 2e^x - x - 2$.

5. Use el algoritmo lineal de diferencias finitas para aproximar las soluciones de $y = e^{-10x}$ al problema con valor de frontera

$$y'' = 100y, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad y(0) = 1, \quad y(1) = e^{-10}.$$

Use $h = 0.1$ y 0.05 . ¿Puede explicar las consecuencias?

6. $y'' = -(y')^2 - y + \ln x$, $1 \leq x \leq 2$, $y(1) = 0$, $y(2) = \ln 2$.
 $h=0.5$, solución real $y(x) = \ln x$.