

Elementos finitos aplicados.

Prefacio

El método de los elementos finitos es un procedimiento ampliamente aceptado para la solución numérica de las ecuaciones diferenciales de la ingeniería y de la física y es la base de cálculo de los muchos sistemas de diseño asistido por ordenador. La enseñanza de los fundamentos del método de los elementos finitos se está convirtiendo rápidamente en una necesidad en los planes de estudio que resuelven problemas en las áreas generales de análisis estructural, mecánica de medios continuos, transferencia de calor y el flujo de fluido.

Este es un libro de texto introductorio que cubre los conceptos básicos del método de elementos finitos y su aplicación al análisis de estructuras planas y problemas bidimensionales continuos en la transferencia de calor, el flujo de fluido irrotacional, y la elasticidad. Los temas pueden ser manejados por estudiantes avanzados de postgrado de alto nivel y principiantes y se les ha enseñado en un curso en este nivel durante 10 años. Ningún conocimiento de análisis estructural o el método de elementos finitos se necesita.

Las principales diferencias entre este libro y la primera edición es la organización, la inclusión de cinco nuevos capítulos que introducen el análisis de estructuras planas, un aumento en el número de problemas de tarea, y el uso del método de Galerkin en conjunción con la solución de los problemas de campo.

La organización del material es único y hace que el libro sea más útil como herramienta de enseñanza. El libro consta de cuatro partes: conceptos básicos, los problemas de campo, problemas mecánicos y estructurales sólidos y elementos lineales y cuadráticos. Los conceptos básicos abarcan seis capítulos y contienen la información necesaria para estudiar problemas de campo y / o aplicaciones de mecánica estructural y sólida. Una vez que los conceptos básicos se han completado, o bien la segunda parte, los problemas de campo, o la tercera parte, la mecánica estructural y sólido, se pueden estudiar. Estas dos secciones del libro son independientes, los estudiantes pueden estudiar cualquiera de las partes o capítulos de ambas partes dependerá de sus intereses. La cuarta parte, los elementos lineales y cuadráticos, cubre los procedimientos generales para el desarrollo de las funciones de forma de elementos y numéricamente la integración de las matrices de los elementos. Esta parte puede ser cubierta después de algunas de las aplicaciones sobre el continuo se hayan completado.

La organización del libro ofrece al instructor por lo menos tres opciones de enseñanza diferentes: (1) un curso general de elementos finitos con temas seleccionados de campo y aplicaciones de mecánica de sólidos, (2) un curso haciendo hincapié en la solución de los problemas de campo, o (3) un curso haciendo hincapié en la solución de los problemas de mecánica de sólidos. El autor enseña el primer tipo de curso y abarca los capítulos 1 a 11, 17, 18, 23, y 24 en aproximadamente 40 conferencias.

Los capítulos que introducen el análisis de las estructuras planas están incluidos para los estudiantes de ingeniería agrícola y mecánica que necesitan una introducción al análisis matricial de estructuras, pero que no tienen tiempo para tomar varios cursos de ingeniería civil para obtener el material. El método de desplazamiento de análisis estructural basado en el principio de la energía potencial mínima se presenta. Esta formulación es coherente con el análisis de elementos finitos de problemas de elasticidad. El Método de Galerkin se ha utilizado para resolver los problemas de campo, ya que es un enfoque que es más fácilmente aceptado por las personas mayores y empiezan estudiantes de posgrado. Estos estudiantes no han tenido ningún cálculo variacional, por lo que el concepto de un funcional suele ser bastante misterioso para ellos. Método de Galerkin, ofrece dos ventajas principales. La inclusión de derivadas en las condiciones de contorno es un procedimiento sencillo, y el estudiante encontrará que él o ella a estudiado un método que se puede utilizar para formular las ecuaciones diferenciales con un término con primera derivada. La desventaja del método de Galerkin es el surgimiento de los requisitos inter-elementos, que nunca se utilizan y son un poco difícil de explicar. Cabe señalar, sin embargo, que los requisitos inter-elementos también ocurren en la formulación variacional cuando se aplican correctamente. El método variacional no se presenta correctamente en la mayoría de los libros de los elementos finitos.

El número de problemas de la tarea se ha aumentado a más de 300 con la mayoría de los capítulos que tienen al menos 10 y muchos más de 15 . Los problemas son una mezcla de cálculo numérico, deducciones analíticas, o la evaluación de integrales importantes y problemas que requieren una solución de computadora. Un manual de solución completo está disponible en el editor.

El método de los elementos finitos debe ser implementado en una computadora digital; de aquí que, cuatro programas de computación han sido incluidos. Estos programas están escritos específicamente para el usuario principiante y contienen pruebas de diagnóstico para detectar los errores cometidos por los usuarios primerizos. Estos controles son muy eficientes y eliminar la mayor parte del contacto estudiante-instructor en relación con la búsqueda de errores en los datos de entrada.

Me gustaría dar las gracias a los muchos estudiantes en MMM809 que utilizaron las páginas manuscritas originales de este libro, así como varias versiones mecanografiadas. Sus preguntas y sugerencias fueron una contribución inestimable y han influido en la organización completa del libro, así como determinados párrafos en el texto. También me gustaría dar las gracias a mi esposa Donna por su paciencia durante la escritura de este guión manuscrito.

Larry J. Segerlind

East Lansing, Michigan

Contenidos

PARTE UNA CONCEPTOS BASICOS

Chapter 1 INTRODUCTION

- 1.1 Solution of Boundary Value Problems
- 1.2 Integral Formulations for Numerical Solutions
- 1.2.1 Variational Method
- 1.2.2 Collocation Method
- 1.2.3 Subdomain Method
- 1.2.4 Galerkin's Method
- 1.2.5 Least Squares Method
- 1.3 Potential Energy Formulations
- 1.4 The Finite Element Method
- 1.5 Objective and Organization Problems

Chapter 2 ONE-DIMENSIONAL LINEAR ELEMENT

- 2.1 Division of the Region into Elements
- 2.2 The Linear Element
- 2.3 A Continuous Piecewise Smooth Equation
- 2.4 A Comment on Notation Problems

Chapter 3 A FINITE ELEMENT EXAMPLE

- 3.1 Weighting Functions
- 3.2 The Weighted Residual Integral
- 3.3 Evaluation of the Integral
- 3.4 Analysis of a Simply Supported Beam
- 3.5 Matrix Notation Problems

Chapter 4 ELEMENT MATRICES: GALERKIN FORMULATION

- 4.1 Element Matrices
- 4.2 Direct Stiffness Method
- 4.3 Analysis of a Simply Supported Beam
- 4.4 Properties of the Global Stiffness Matrix
- 4.5 General Flow of the Computations Problems

Chapter 5 TWO-DIMENSIONAL ELEMENTS

- 5.1 Two-Dimensional Grids
- 5.2 Linear Triangular Element
- 5.3 Bilinear Rectangular Element
- 5.4 A Continuous Piecewise Smooth Equation Problems

Chapter 6 COORDINATE SYSTEMS

- 6.1 Local Coordinate Systems
- 6.2 Natural Coordinate Systems
- 6.3 Rectangular Element
- 6.4 Triangular Element: Area Coordinates
- 6.5 Continuity Problems

PART TWO FIELD PROBLEMS

Chapter 7 TWO-DIMENSIONAL FIELD EQUATION

- 7.1 Governing Differential Equations
- 7.2 Integral Equations for the Element Matrices
- 7.3 Element Matrices: Triangular Element
- 7.4 Element Matrices: Rectangular Element Problems

Chapter 8 TORSION OF NONCIRCULAR SECTIONS

- 8.1 General Theory
- 8.2 Twisting of a Square Bar
- 8.3 Shear Stress Components
- 8.4 Evaluation of the Twisting Torque
- 8.5 Computer Solutions for the Square Bar Problems

Chapter 9 DERIVATIVE BOUNDARY CONDITIONS: POINT SOURCES AND SINKS

- 9.1 Derivative Boundary Conditions
- 9.2 Evaluation of the Element Integrals Point Sources and Sinks
- 9.3 Point Sources and Sinks

Chapter 10 IRROTATIONAL FLOW

- 10.1 Flow of an Ideal Fluid
 - 10.1.1 Streamline Formulation
 - 10.1.2 Potential Formulation
- 10.2 Groundwater Flow
- 10.3 Computer Examples
 - 10.3.1 Flow Around a Cylinder
 - 10.3.2 Regional Aquifer Problems

HEAT TRANSFER BY CONDUCTION AND CONVECTION

- 11.1 The One-Dimensional Fin
- 11.2 The Composite Wall
- 11.3 The Two-Dimensional Fin
- 11.4 Long Two-Dimensional Bodies
 - 11.4.1 Convection Boundary Condition
 - 11.4.2 Heat Flux into the Body
- 11.4.3 Concluding Remarks
- 11.5 A Computer Example
 - A Problems

ACOUSTICAL VIBRATIONS

- 12.1 One-Dimensional Vibrations
- 12.2 Two-Dimensional Vibrations Problems

Chapter 13 AXISYMMETRIC FIELD PROBLEMS

- 13.1 The Differential Equation
- 13.2 Axisymmetric Elements
- 13.3 Galerkin's Method
- 13.4 Element Matrices
- 13.5 The Derivative Boundary Condition Problems

Chapter 14

TIME-DEPENDENT FIELD PROBLEMS: THEORETICAL CONSIDERATIONS

- 14.1 Galerkin's Method
- 14.2 The Consistent Formulation
- 14.3 The Lumped Formulation
- 14.4 Finite Difference Solution in Time
- 14.5 Heat Flow in a Rod Problems

Chapter 15 TIME-DEPENDENT FIELD PROBLEMS: PRACTICAL CONSIDERATIONS

- 15.1 Physical Reality
- 15.2
- 15.3 Numerical Oscillations
 - Lumped or Consistent Formulation?
 - 15.3.1 Consistent Formulation

15.3.2 Lumped Formulation

15.4

15.3.3 Summary

PRIMERA PARTE

CONCEPTOS BÁSICOS

En los primeros seis capítulos se abordan los conceptos básicos para todas las aplicaciones del método de los elementos finitos. En estos capítulos se deben cubrir antes de ir a los capítulos de aplicación.

Capítulo 1

INTRODUCCIÓN

El método de elementos finitos es un procedimiento numérico para la obtención de soluciones para muchos de los problemas encontrados en el análisis de ingeniería. Tiene dos subdivisiones principales. El primero utiliza elementos discretos para obtener los desplazamientos y las fuerzas de conjuntos de miembro de un marco estructural. El segundo utiliza los elementos continuos para obtener soluciones aproximadas a la transferencia de calor, mecánica de fluidos, y los problemas de mecánica de sólidos. La formulación utilizando los elementos discretos que se conoce como la "matriz de análisis de estructuras" y produce resultados idénticos con el análisis clásico de los marcos estructurales. El segundo enfoque es el verdadero método de los elementos finitos. Se produce valores aproximados de los parámetros deseados en puntos específicos llamados nodos. Un programa informático general de elemento finito, sin embargo, es capaz de resolver los dos tipos de problemas y el nombre de "método de los elementos finitos" se utiliza a menudo para referirse tanto a la parte diferenciada y las formulaciones de elementos continuos.

El método de los elementos finitos combina varios conceptos matemáticos para producir un sistema de ecuaciones lineales o no lineales. El número de ecuaciones es generalmente muy grandes, de 20 a 20.000 o más, y requiere la potencia de cálculo de un ordenador digital. El método tiene poco valor práctico si un computador no se encuentra disponible.

Es imposible documentar el origen exacto del método de elemento finito porque los conceptos básicos han evolucionado durante un período de 150 años o más. El método tal como la conocemos hoy en día es el resultado de varios artículos publicados en la década de 1950 que ampliaron el análisis de la matriz de las estructuras a los cuerpos continuos. La exploración espacial de la década de 1960 proporcionó fondos para la investigación básica, que puso el método sobre una firme base matemática y estimuló el desarrollo de programas informáticos de propósito múltiple que implementó el método. El diseño de aviones, misiles, cápsulas espaciales, y similares, proporcionaron las áreas de aplicación.

Aunque el origen del método es impreciso, sus ventajas son evidentes. El método se aplica fácilmente a la forma irregular objetos compuestos de varios materiales diferentes y pueden tenerse condiciones mixtas de contorno. Es aplicable a problemas de estado estacionario y dependiente del tiempo, así como problemas relacionados con las propiedades no lineales de materiales. Programas generales de computación que son independiente del usuario puede ser, y han sido desarrollados. Programas que asisten al usuario y que generan una red de un número limitado de puntos que definen la forma están disponibles, así como programas que analizan los resultados y los muestran en forma gráfica están en estudio.

El método de los elementos finitos es la base de cálculo de los muchos programas de diseño asistido por ordenador. El aumento del uso de diseño asistido por ordenador hace que sea imperativo que el ingeniero practicante deba tener un conocimiento de cómo funciona el método de elementos finitos.

1.1 Solución de problemas de contorno

La mejor manera de resolver cualquier problema físico gobernado por una ecuación diferencial es obtener la solución analítica. Hay muchas situaciones, sin embargo, donde la solución analítica

es difícil de obtener. La región en cuestión puede ser tan irregular que es matemáticamente imposible describir la frontera. La configuración puede estar compuesta de varios materiales diferentes, cuyas regiones son difíciles de describir matemáticamente. Los problemas que involucran materiales anisotrópicos son por lo general difíciles de resolver analíticamente, como lo son las ecuaciones que tienen términos no lineales.

Un método numérico se puede utilizar para obtener una solución aproximada en la que una solución analítica no puede desarrollarse. Todas las soluciones numéricas producen valores en puntos discretos para un conjunto de los parámetros independientes. El procedimiento de solución completa se repite cada vez que estos parámetros cambian. Las soluciones numéricas, sin embargo, son más deseables que ninguna solución en absoluto. Los valores calculados proporcionan información importante sobre el proceso físico a pesar de que están en puntos discretos.

Existen varios procedimientos para la obtención de una solución numérica de una ecuación diferencial. Los métodos se pueden dividir en tres grupos básicos: (1) el método de diferencia finita, (2) el método variacional, y (3) los métodos con un peso residual. Estos métodos se describen brevemente en los siguientes párrafos.

Método de Diferencias Finitas

El método de las diferencias finitas aproxima las derivadas en la ecuación diferencial que gobierna usando ecuaciones en diferencias. Este método es útil para resolver problemas de transferencia de calor y de mecánica de fluidos y funciona bien para las regiones de dos dimensiones con límites paralelos a los ejes de coordenadas. El método, sin embargo, es bastante incómodo cuando las regiones tienen fronteras curvas o irregulares, y es difícil escribir programas de ordenador generales para el método.

Método variacional: El enfoque variacional implica la integral de una función que produce un número. Cada nueva función genera un número nuevo. La función que produce el número más bajo tiene la propiedad adicional de que satisface una ecuación diferencial específica. Para ayudar a aclarar este concepto, considere la integral

$$\Pi = \int_0^H \left[\frac{D}{2} \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 - Qy \right] dx \quad (1.1)$$

El valor numérico de Π se puede calcular dando una ecuación específica $y = f(x)$. El cálculo de variaciones muestra, sin embargo, que la ecuación particular $y = g(x)$, que produce el menor valor numérico de Π , es la solución de la ecuación diferencial

$$D \frac{d^2 y}{dx^2} + Q = 0 \quad (1.2)$$

Con las condiciones de contorno (frontera) $y(0) = y_0$ and $y(H) = y_H$.

El proceso puede ser invertido. Dada una ecuación diferencial, una solución aproximada se puede conseguir mediante la sustitución de diferentes funciones de prueba en el funcional aproximado. La función de ensayo que da el valor mínimo de Π es la solución aproximada..

El método variacional es la base para muchas formulaciones de elementos finitos, pero tiene una gran desventaja: no es aplicable a cualquier ecuación diferencial con - contengan un término con primera derivada.

Métodos de los residuos Ponderados

Los métodos residuales ponderados también implican una integral. En estos métodos, una solución aproximada se sustituye en la ecuación diferencial. Puesto que la solución aproximada no satisface la ecuación, se obtiene un término residual o error. Supóngase que $y = h(x)$ es una solución aproximada para (1,2). Sustitución dá

$$D \frac{d^2 h(x)}{dx^2} + Q = R(x) \neq 0 \quad (1.3)$$

Ya que $y = h(x)$ no satisface la ecuación. Los métodos de residuos ponderados requieren que

$$\int_0^H W_i(x) R(x) dx = 0 \quad (1.4)$$

El residuo $R(x)$ se multiplica por una función de ponderación $W_i(x)$ y la integral del producto es necesario que sea cero. El número de funciones de ponderación es igual al número de coeficientes desconocidos en la solución aproximada. Hay varias opciones para las funciones de ponderación, y a algunas de las opciones más populares se les han asignado nombres.

Método de Colocación.

Se seleccionan las funciones de impulso $W_i(x) = \delta(x - X_i)$ como las funciones de ponderación. Esta selección es equivalente a exigir que el residuo se anule en puntos específicos. El número de puntos seleccionados es igual al número de coeficientes indeterminados en la solución aproximada.

Método del Subdominio . Cada función de ponderación se selecciona como la unidad,

$W_i(x) = 1$, sobre una región específica. Esto es equivalente a exigir que la integral del residuo se anule en un intervalo de la región. El número de intervalos de integración es igual al número de coeficientes indeterminados en la solución aproximada.

Método de Galerkin. Método de Galerkin utiliza las mismas funciones para $W_i(x)$ que se usaron en la ecuación de aproximación. Este enfoque es la base del método de los elementos finitos para problemas que implican términos con derivadas de primer orden. Este método produce el mismo resultado que el método variacional cuando se aplica a ecuaciones diferenciales que son auto-adjuntas. Método de Galerkin se utiliza para desarrollar las ecuaciones de elementos finitos para los problemas de campo discutidas en este libro.

Método de mínimos cuadrados. El método de mínimos cuadrados utiliza el residuo como la función de ponderación y obtiene un nuevo término de error definido por

$$Er = \int_0^H [R(x)]^2 dx \quad (1.5)$$

Este error es minimizada con respecto a los coeficientes desconocidos en la solución aproximada. El método de mínimos cuadrados se ha utilizado para formular soluciones de elementos finitos, pero no es tan popular como método de Galerkin y el enfoque variacional.

El método variacional y los métodos ponderados residuales implican cada uno una integral. Estos métodos pueden ser agrupados bajo el título de Formulaciones integrales. Una solución numérica basada en una formulación integral es un concepto nuevo para muchas personas, por lo tanto, algunos de los métodos más comunes se ilustran mediante la solución de un problema simple.

1,2 FORMULACIONES INTEGRAL DE SOLUCIÓN NUMÉRICA

El objetivo inmediato es ilustrar cómo cada uno de los métodos integrales discutidos en la sección anterior se puede utilizar para obtener una solución aproximada para un problema físico. El ejemplo es una viga simplemente apoyada sometida a momentos concentrados en cada extremo.

La viga y su diagrama de momento de flexión se muestran en la Figura 1,1. La ecuación diferencial que gobierna es

$$EI \frac{d^2y}{dx^2} - M(x) = 0 \quad (1.6)$$

Con las condiciones de contorno

$$y(0) = 0 \quad \text{and} \quad y(H) = 0 \quad (1.7)$$

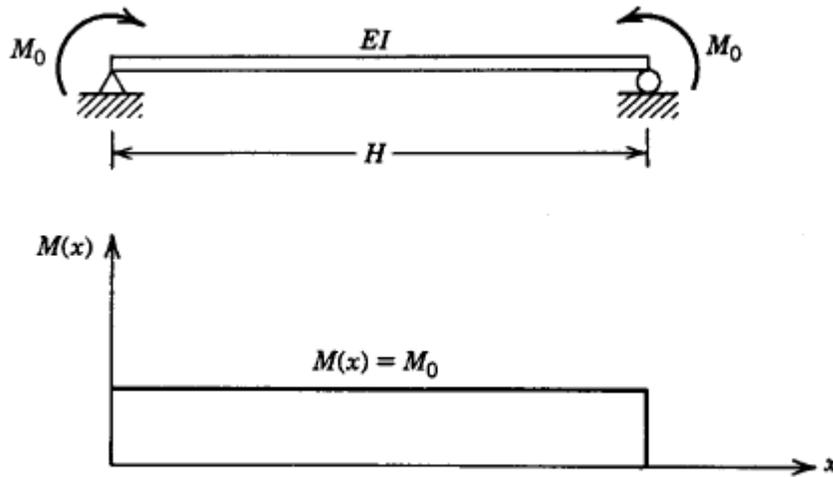


Figure 1.1. A simply supported beam with concentrated end moments.

El coeficiente EI representa la resistencia de la viga a la flexión y $M(x)$ es la ecuación de momento de flexión. En este ejemplo, $M(x)$ tiene el valor constante M_0 . Una solución aproximada para la deflexión del haz es

$$y(x) = A \sin \frac{\pi x}{H} \quad (1.8)$$

donde A es un coeficiente indeterminado. Esta solución es un candidato aceptable porque satisface las condiciones límites $y(0) = y(H) = 0$ y tiene una forma similar a la curva de deflexión esperada. La solución exacta de la ecuación diferencial es

$$y(x) = \frac{M_0 x}{2EI} (x - H) \quad (1.9)$$

1.2.1 Método variacional

La integral de la ecuación diferencial (1,6) es

$$\Pi = \int_0^H \left[\frac{EI}{2} \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 + M_0 y \right] dx \quad (1.10)$$

El valor de A que hace (1,8) la mejor aproximación a la curva de deflexión es el valor que hace a Π un mínimo. Para evaluar A, Π debe ser escrito como una función de A y luego se reducen al mínimo con respecto a A. Observando que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{A\pi}{H} \cos \frac{\pi x}{H}$$

we find that Π becomes

$$\Pi = \int_0^H \left[\frac{EI}{2} \left(\frac{A\pi}{H} \cos \frac{\pi x}{H} \right)^2 + M_0 A \sin \frac{\pi x}{H} \right] dx$$

or

$$\Pi = \left(\frac{EI\pi^2}{4H} \right) A^2 + \left(\frac{2M_0 H}{\pi} \right) A \quad (1.11)$$

Minimizing Π yields

$$\frac{\partial \Pi}{\partial A} = 2 \left(\frac{EI\pi^2}{4H} \right) A + \frac{2M_0 H}{\pi} = 0$$

and

$$A = - \frac{4M_0 H^2}{\pi^3 EI} \quad (1.12)$$

The approximate solution is

$$y(x) = - \frac{4M_0 H^2}{\pi^3 EI} \sin \frac{\pi x}{H} \quad (1.13)$$

1.2.2 Método de Colocación

El método de colocación requiere que la ecuación residual para la solución aproximada sea cero en tantos puntos como coeficientes indeterminados hay. El residuo se obtiene sustituyendo (1,8) en (1,6). El resultado es

$$R(x) = -EI \frac{A\pi^2}{H^2} \sin \frac{\pi x}{H} - M_0 \quad (1.14)$$

Ya que

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{A\pi^2}{H^2} \sin \frac{\pi x}{H}$$

Sólo hay un coeficiente indeterminado, por lo tanto, $R(x)$ se iguala a cero en un punto entre 0 y H . Seleccionando $x = H/2$ para mayor comodidad, se obtiene

$$R\left(\frac{H}{2}\right) = -EI \frac{A\pi^2}{H^2} \sin \frac{\pi}{2} - M_0 = 0$$

$$A = -\frac{M_0 H^2}{EI\pi^2} \quad (1.15)$$

Y la solución aproximada es

$$y(x) = -\frac{M_0 H^2}{EI\pi^2} \sin \frac{\pi x}{H} \quad (1.16)$$

Con un punto que no sea $x = H/2$ seleccionado, una solución aproximada diferente se habría sido obtenido.

1.2.3 Método del Subdominio

El método requiere que el subdominio $\int R(x) dx = 0$ sobre tantos subintervalos como coeficientes indeterminados hayan. El usuario puede elegir la longitud de cada subintervalo. En el presente ejemplo sólo hay un coeficiente desconocido, por lo que el intervalo debe ser $[0, H]$. La ecuación es residual (1,14), por lo tanto

$$\int_0^H R(x) dx = \int_0^H \left[-EI \frac{A\pi^2}{H^2} \sin \frac{\pi x}{H} - M_0 \right] dx = 0$$

Integrando resulta

$$-\left(\frac{2EI\pi}{H}\right)A - M_0H = 0$$

and

$$A = -\frac{M_0H^2}{2\pi EI} \quad (1.17)$$

La solución aproximada es

$$y(x) = -\frac{M_0H^2}{2\pi EI} \sin \frac{\pi x}{H} \quad (1.18)$$

1.2.4 Método de Galerkin.

Cuando se utiliza el método de Galerkin, $\int W_i(x)R(x) dx$ se evalúa usando las mismas funciones para $W_i(x)$ que se utilizaron en la solución aproximada. En este ejemplo sólo hay una función de ponderación, $W_i(x) = \sin \pi x/H$.

La ecuación es residual (1,14) y la integral es

$$\int_0^H \sin \frac{\pi x}{H} \left[-EI \frac{A\pi^2}{H^2} \sin \frac{\pi x}{H} - M_0 \right] dx = 0$$

Integrando resulta

$$-\frac{EI\pi^2 A}{2H} + \frac{2M_0H}{\pi} = 0$$

Resolviendo para A:

$$A = -\frac{4M_0H^2}{\pi^3EI} \quad (1.19)$$

Y la solución aproximada es

$$y(x) = -\frac{4M_0H^2}{\pi^3EI} \sin \frac{\pi x}{H} \quad (1.20)$$

Esta solución es idéntica a la obtenida usando el método variacional.

1.2.5 Método de los mínimos cuadrados.

Un nuevo término de error, $Er = \int [R(x)]^2$, se forma cuando se utiliza el método de los mínimos cuadrados. La sustitución en la ecuación residual da

$$Er = \int_0^H \left[-\frac{EI\pi^2}{H^2} A \sin \frac{\pi x}{H} - M_0 \right]^2 dx$$

La integración da

$$Er = \frac{A^2H}{2} \left(\frac{EI\pi^2}{H^2} \right)^2 + \frac{4M_0EI\pi}{H} A + M_0^2H$$

El error es minimizado con respecto a A resultando

$$\frac{\partial Er}{\partial A} = AH \left(\frac{EI\pi^2}{H^2} \right)^2 + \frac{4M_0EI\pi}{H} = 0 \quad (1.21)$$

Después de resolver para A, la solución aproximada es

$$y(x) = -\frac{4M_0H^2}{\pi^3EI} \sin \frac{\pi x}{H} \quad (1.22)$$

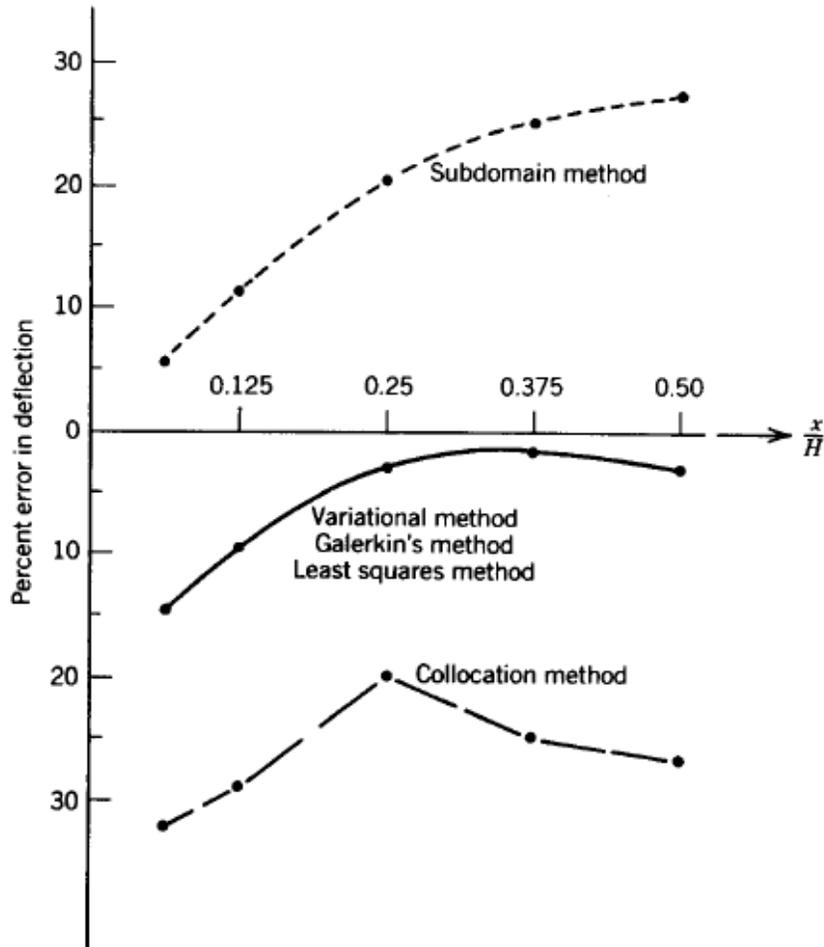


Figure 1.2. Percentage error for the five approximate solutions for the simply supported beam.

y es idéntico a las soluciones obtenidas utilizando el método variacional y método de Galerkin de, (1,13) y (1,20).

No es posible indicar qué método es el más preciso. El error depende de la función de aproximación y la ecuación se resuelve. Porcentaje de error para las curvas de los diferentes métodos se presentan en la Figura 1.2. Parece que la ecuación (1,22) es más precisa que cualquiera de las ecuaciones (1,16) o (1,18). Sin embargo, es posible encontrar un punto de colocación que produce una deflexión máxima que está de acuerdo con el valor exacto (véase el problema 1,16). Los puntos de colocación o subregiones seleccionadas afectan la precisión de las soluciones aproximadas.

El punto importante que se pueden obtener a partir de estos ejemplos es que la solución numérica de una ecuación diferencial puede formularse en términos de una integral. La formulación integral es una característica básica del método de elemento finito.

1,3 FORMULACIONES energía potencial

La solución de los problemas de mecánica de sólidos, que incluye la solución de problemas de elasticidad en dos y tres dimensiones, así como estructuras de placa y armazón, puede ser enfocado de varias maneras. El enfoque clásico es la formulación de la ecuación diferencial y la obtención de la solución analítica. Esto no funciona para muchos problemas a causa de las dificultades en matemática que describe la geometría estructural y / o las condiciones de contorno. Una alternativa popular para el enfoque clásico es un procedimiento numérico basado en un principio que dice que los desplazamientos en la posición de equilibrio se producen de tal manera que la energía potencial de un sistema estable es un valor mínimo.

Un término que contribuye a la energía potencial es la energía de deformación. Esta es la energía almacenada durante el proceso de deformación. La energía de deformación es una integral de volumen que utiliza productos de la tensión y los componentes de deformación. Por ejemplo, la energía de deformación en un miembro de la fuerza axial es

$$\Lambda = \int_V \frac{\sigma_{xx} \epsilon_{xx}}{2} dV \quad (1.23)$$

Se dirá más sobre el principio de mínima energía potencial y la energía de deformación en capítulos posteriores. El concepto importante tener en cuenta ahora es que el análisis de los problemas de mecánica estructural y sólido combina la energía de deformación integral con un proceso de minimización. Computacionalmente, el análisis de una estructura de armazón o placa parece muy similar a los enfoques variacionales y Galerkin de la sección anterior. La similitud debería ser evidente en el momento en que el lector ha terminado este libro.

1.4 EL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS

El método de los elementos finitos es un procedimiento numérico para resolver problemas físicos regidos por una ecuación diferencial o un teorema de energía. Tiene dos características que lo distinguen de otros procedimientos numéricos:

1. El método utiliza una formulación integral para generar un sistema de ecuaciones algebraicas.
2. El método utiliza funciones suaves a trozos continuos para aproximar la cantidad desconocida o cantidades.

La segunda característica que distingue el método de elemento finito de otros procedimientos numéricos que utilizan una formulación integral. Recordemos la solución aproximada utilizado en la sección anterior, $y = A \sin \pi x/H$. Esta función es continua y tiene un número infinito de derivadas continuas. El método de elementos finitos utiliza no solamente una función continua, sino una función con suficiente continuidad en los derivadas para permitir evaluar las integrales. Para una formulación integral tal como el método variacional (1.10), no se requiere continuidad en la primera derivada. La integral se puede evaluar cuando la primera derivada es continua por

partes. Una ecuación compuesta de varios segmentos lineales se puede utilizar como la ecuación de aproximación.

Un modelo de elementos finitos para el problema de desviación del haz considerado en la sección anterior puede aparecer como se muestra en la figura 1,3. Podría consistir en varios segmentos lineales definidas en términos de los valores nodales, como se muestra en la figura 1.3a.

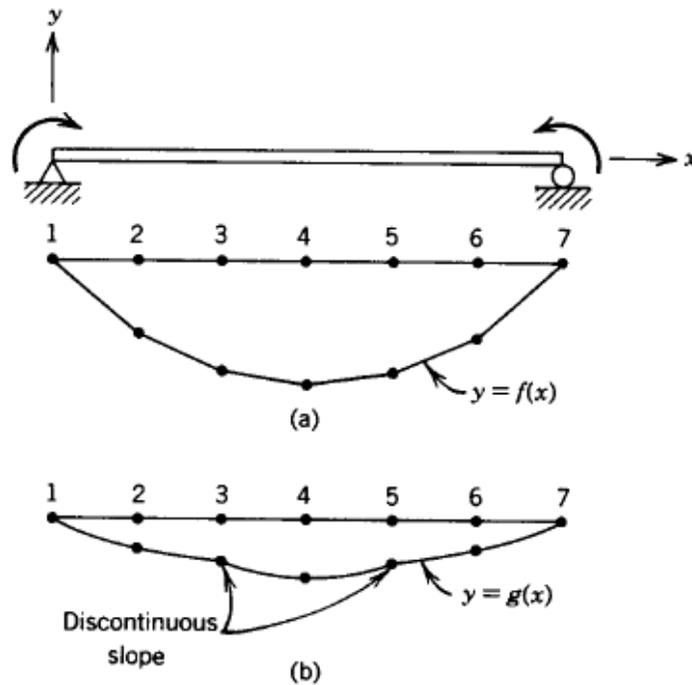


Figure 1.3. (a) A linear finite element model. (b) A quadratic finite element model.

El intervalo entre cada nodo sería considerado como un elemento, y la desviación se aproxima por segmentos de línea recta. Una grilla alternativa podría consistir de tres elementos cada uno definido por tres puntos de nodo, como se muestra en la Figura 1,36. En este caso, una ecuación de segundo grado se define a través de cada conjunto de tres puntos. En cualquier caso, las ecuaciones $y = f(x)$ o $y = g(x)$ no tendría una derivada continua primero entre cualquier par de elementos adyacentes.

Funciones sin términos con primera derivada continua también se puede utilizar en el método de Galerkin. El segundo término derivado, d^2y/dx^2 , se modifica utilizando integración por partes.

El método de elementos finitos puede subdividirse en cinco pasos básicos. Estos pasos están listados aquí, y se ilustra en los siguientes dos capítulos.

1. Discretice la región. Esto incluye la localización y la numeración de los puntos nodos, así como especificar sus valores de coordenadas.
2. Especifique la ecuación de aproximación. El orden de la aproximación lineal o cuadrática, deberán especificarse y las ecuaciones deben ser escritas en términos de los valores nodales desconocidas. Una ecuación debe ser escrita para cada elemento.
3. Desarrollar el sistema de ecuaciones. Al utilizar el método de Galerkin, la función de ponderación de cada valor desconocido nodal se define como la integral residual ponderada se evalúa. Esto genera una ecuación para cada valor desconocido nodal. En la formulación de la energía potencial, la energía potencial del sistema se escribe en términos de los desplazamientos nodales y luego se reduce al mínimo. Esto da una ecuación para cada uno de los desplazamientos desconocidos.
4. Resuelve el sistema de ecuaciones.
5. Calcular las cantidades de interés. Estas cantidades están por lo general relacionadas con la derivada del parámetro e incluye las componentes de la tensión y el flujo de calor y la velocidad del fluido.

1.5 OBJETIVO Y ORGANIZACIÓN

El objetivo de este libro es proporcionar una introducción básica para el método de elemento finito, que se utiliza para obtener soluciones para la transferencia de calor, el flujo irrotacional y problemas de elasticidad, y el análisis de dos dimensiones marcos estructurales. Este libro no es un libro de texto sobre el método de los elementos finitos. Usted debe, sin embargo, ser capaz de leer y entender los libros más avanzados y la documentación técnica una vez que el material de este libro se ha completado.

Este libro de texto contiene muchos problemas de ejemplo y problemas de tarea. La organización del material ha evolucionado a lo largo de varios años de enseñar el material a seniors y estudiantes de posgrado. El libro está dividido en cuatro partes: conceptos básicos, los problemas estructurales del campo, y los problemas de mecánica de sólidos y elementos integrados numéricamente. Una vez que los conceptos básicos han sido cubiertos, el lector puede acudir a cualquiera de los dos el grupo de capítulos que abarcan los problemas de campo o capítulos de los que discuten los problemas de mecánica estructural y sólida. Estas dos partes del libro son independientes. Los elementos integrados numéricamente pueden ser estudiados después de que se estudie uno de los problemas de campo o de la mecánica. Inicialmente se hace énfasis en los elementos lineales porque las matrices de estos elementos pueden ser evaluados utilizando una calculadora de mano. Los elementos integrados numéricamente deben estar sujetos solamente después de que los elementos lineales se entienden completamente.

Un buen conocimiento de las matemáticas de pregrado, incluyendo un poco de álgebra lineal, es todo lo que se necesita para manejar el material en las tres primeras partes. Se supone que el lector tiene un conocimiento de fondo en algunas de las áreas de aplicación. Un conocimiento limitado del cálculo avanzado es necesario para entender los elementos de la integración numérica.

Un comentario sobre la notación matricial es utilizada en este libro aparece en el Apéndice I.

PROBLEMAS

1.1-1.5 Obtener una ecuación aproximada para el desplazamiento viga simplemente apoyada de longitud H y sección de propiedad EI mostrada en la Figura P1.1. Suponga que la ecuación de prueba del desplazamiento tiene por ecuación $y(x) = A \sin \pi x/H$. Compare la deflexión en el centro con el valor teórico $y = -5WH^4/384EI$. La ecuación diferencial que gobierna es

$$EI \frac{d^2y}{dx^2} - \frac{Wx(H-x)}{2} = 0$$

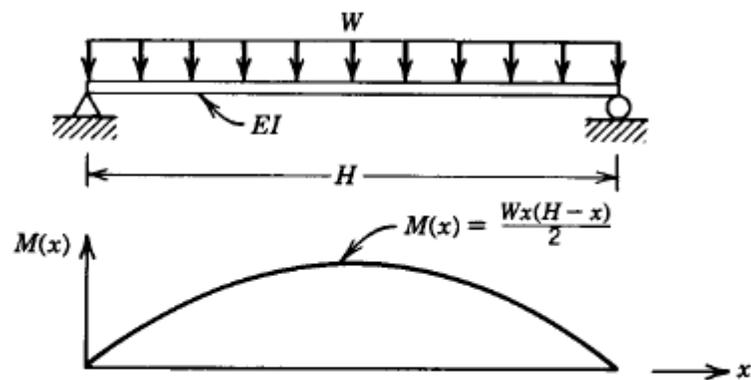


Figure P1.1

1.1 Evaluate A by minimizing the integral

$$\Pi = \int_0^H \left[\frac{EI}{2} \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 + \left(\frac{Wx(H-x)}{2} \right) y \right] dx$$

1.2 Evaluar A exigiendo que el residuo se anule en (a) $x = H/3$, y (b) $x = H/2$.

1.3 Evaluar A utilizando el método de subdominio.

1.4 Evaluar A utilizando el método de Galerkin.

1.5 Evaluar A utilizando el método de mínimos cuadrados.

1.6-1.9 Obtener una ecuación desplazamiento aproximado para la viga simplemente apoyada muestra en la Figura P1.6 utilizando la solución de prueba $y(x) = A \sin \pi x/H$. Compare la deflexión en el centro y con el valor teórico $y = -0.06415 M_0 H^2/EI$. La ecuación diferencial que gobierna es

$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{M_0 x}{H} = 0$$

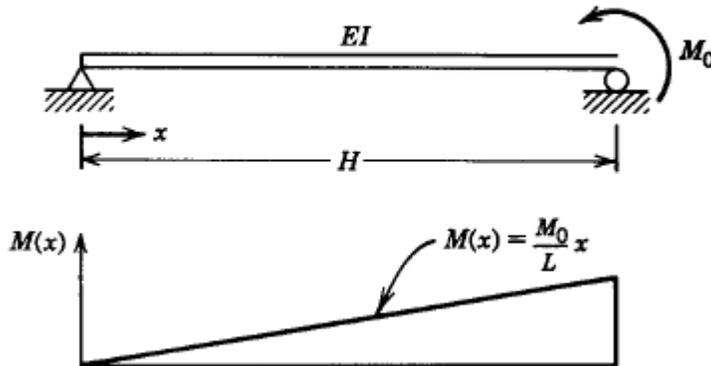


Figure P1.6

1.6 Calcule A minimizando la integral

$$\Pi = \int_0^H \left[\frac{EI}{2} \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 + \frac{M_0 x}{H} y \right] dx$$

1.7 Evaluar A exigiendo que el residuo se anule en (a) $x = H/2$, y (b) $x = 0.577 H$.

1.8 Evaluar A utilizando el método de subdominio.

1.9 Evaluar A utilizando el método de Galerkin.

1.10-1.13 Obtener una ecuación desplazamiento aproximado para la viga simplemente apoyada muestra en la Figura P1.10 utilizando la solución de prueba $y(x) = A \sin \pi x/H$. Compare la

deflexión en el centro y con el valor teórico $y = \frac{PH^3}{48EI}$. La ecuación diferencial que

$$EI \frac{d^2y}{dx^2} - \frac{Px}{2} = 0 \quad 0 \leq x \leq \frac{H}{2}$$

$$EI \frac{d^2y}{dx^2} - \frac{P}{2}(H-x) = 0 \quad \frac{H}{2} \leq x \leq H$$

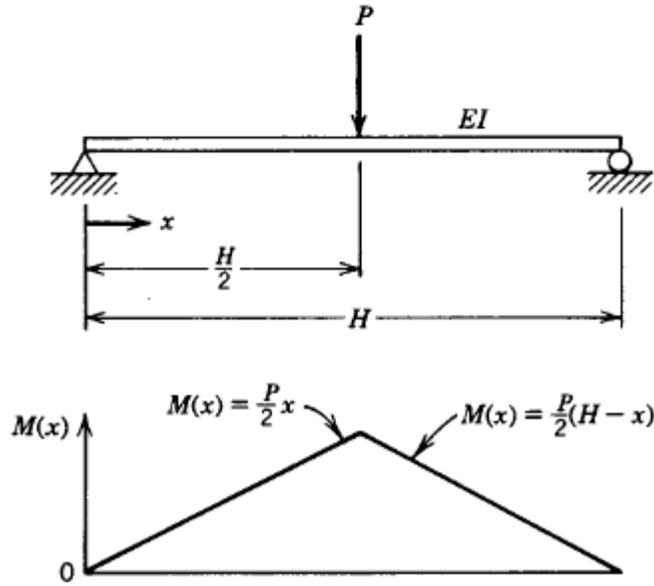


Figure P1.10

gobierna es

1.10 Evaluar A reduciendo al mínimo las integrales

$$\Pi = \int_0^H \frac{EI}{2} \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 dx + \int_0^{H/2} \frac{Pxy}{2} dx + \int_{H/2}^H \frac{P}{2} (H-x)y dx$$

1.11 Evaluar A exigiendo que el residuo se anule en $x = H/2$.

1.12 Evaluar A utilizando el método de subdominio.

1.13 Determinar el punto de colocación para los que A es igual a la deflexión en el centro de la viga, es decir, $A = -\frac{PH^3}{48EI}$.

1.14 Obtener una ecuación aproximada para el desplazamiento viga simplemente apoyada de la figura 1.1 usando la ecuación

$$y(x) = A \sin \frac{\pi x}{H} + B \sin \frac{3\pi x}{H}$$

en conjunto con el método variacional. Pista: Π debe ser minimizado con respecto a A y B.

1.15 Rehaga el problema 1.14 requiriendo que el residuo se anule en $x = H/4$ y $x=H/2$. Deben usarse ambos puntos porque hay dos coeficientes desconocidos A y B.

1.16 Determinar los puntos de colocación x/H para la viga en la Figura 1.1 que produce $A = -M_0 H^2 / 8EI$ (el valor correcto de la deflexión máxima). Utilice $y(x) = A \sin \pi x / H$ como la ecuación aproximada.

1.17 Evaluar A utilizando $y(x) = A(x^2 - xH)$ para una solución aproximada para la viga mostrada en la figura 1.1. Utilice el método variacional.

1.18 Evaluar A para la ecuación y la viga en el problema 1.17 aplicando el método de colocación en $x = H/2$.

1.19 Calcular el valor de Π para la viga en la Figura 1.1 utilizando (1.10) y la solución exacta (1.9). Verificar que el valor de Π para la solución exacta es menor que el valor de la solución aproximada (1.13).

CAPITULO 2

ELEMENTO LINEAL UNIDIMENSIONAL

Nuestro objetivo inmediato es discutir la división de una región unidimensional en elementos lineales y desarrollar una ecuación elemento. La ecuación elemento es entonces generalizada de modo que una ecuación continua suave a trozos pueden ser escritas para la región. El elemento lineal se utiliza para obtener una solución aproximada

$$D \frac{d^2\phi}{dx^2} + Q = 0 \quad (2.1)$$

en el siguiente capítulo. Este elemento también se utiliza para calcular los desplazamientos en un sistema de miembros de las fuerzas axiales, Capítulo 17.

2.1 DIVISIÓN DE LA REGIÓN EN ELEMENTOS

La región unidimensional es un segmento de recta y la división en subregiones o elementos es muy sencilla. El segmento de línea se divide en segmentos más cortos mediante el uso de nodos (Figura 2.1). Los nodos están normalmente numerados consecutivamente de izquierda a derecha, como son los elementos. Los números de elementos están entre paréntesis para distinguirlos de los números de nodo.

Hay algunas reglas para guiar la colocación de los nodos en la obtención de una solución aproximada de una ecuación diferencial.

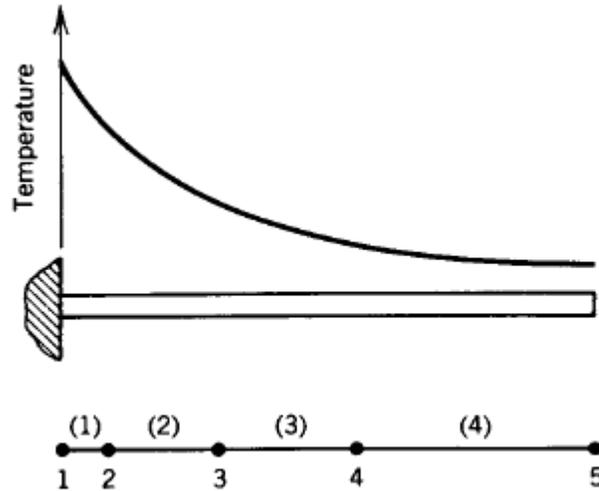


Figure 2.1 Division of a one-dimensional region into elements.

1. Coloque los nodos más cercanos en las regiones donde los parámetros desconocidos cambian rápidamente y más separados donde las incógnitas son relativamente constante.
2. Coloque un nodo siempre que haya un cambio escalonado en el valor de los coeficientes D y Q de (2,1).
3. Coloque un nodo donde el valor numérico de ϕ en (2,1) se necesita.

La primera regla requiere que el usuario tenga algún conocimiento de cómo el parámetro desconocido varía. Aquí es donde entra la experiencia en ingeniería en el proceso de solución. La segunda regla es necesaria porque las integrales que incluyen los parámetros D y Q de (2,1) deben ser evaluados. Las integrales son más fáciles de evaluar si los coeficientes no experimentan un cambio escalonado en el intervalo de integración.

2.2 ELEMENTO LINEAL

El elemento lineal unidimensional es un segmento de línea con una longitud L y dos nodos, uno en cada extremo (Figura 2,2). Los nodos se denota por i y j , y los valores nodales por Φ_i y Φ_j . El origen del sistema de coordenadas está a la izquierda del nodo i . El parámetro ϕ^* varía linealmente entre los nodos, y la ecuación para ϕ es

$$\phi = a_1 + a_2 x \quad (2.2)$$

Los coeficientes a_1 y a_2 pueden ser calculados usando las condiciones en los nodos

$$\begin{aligned} \phi &= \Phi_i & \text{at } x &= X_i \\ \phi &= \Phi_j & \text{at } x &= X_j \end{aligned} \quad (2.3)$$

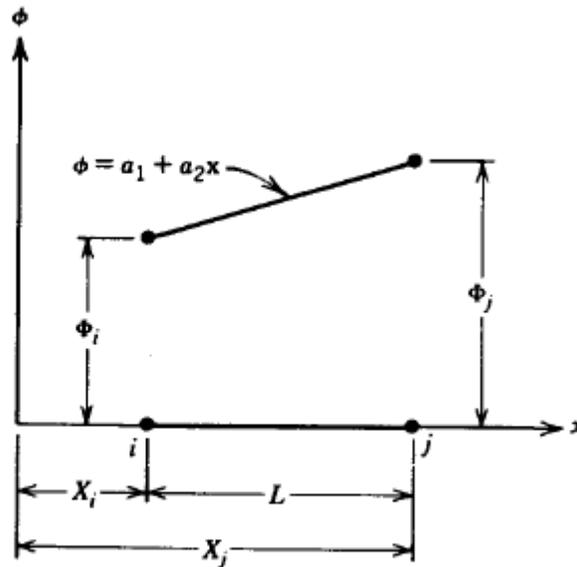


Figure 2.2 The one-dimensional linear element.

♦ El símbolo ϕ se utiliza en este texto para referirse en general a una cantidad escalar. Símbolos en mayúsculas, como X , Y , Φ , and U , denotan valores nodales.

Para desarrollar el par de ecuaciones

$$\begin{aligned} \Phi_i &= a_1 + a_2 X_i \\ \Phi_j &= a_1 + a_2 X_j \end{aligned} \quad (2.4)$$

Que conducen a los valores de a_1 y a_2

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{\Phi_i X_j - \Phi_j X_i}{X_j - X_i} \\ a_2 &= \frac{\Phi_j - \Phi_i}{X_j - X_i} \end{aligned} \quad (2.5)$$

Sustituyendo (2.5) en (2.2) y ordenando resulta

$$\phi = \left(\frac{X_j - x}{L} \right) \Phi_i + \left(\frac{x - X_i}{L} \right) \Phi_j \quad (2.6)$$

Donde $X_j - X_i$ ha sido reemplazado por la longitud del elemento L.

La ecuación (2,6) está escrita en forma estándar en elementos finitos. Los valores nodales son multiplicados por funciones lineales de x, que se llaman funciones de forma o funciones de interpolación. Estas funciones se denotan por N con un subíndice para indicar el nodo con el que se asocia una función de forma específica. Las funciones de forma en (2,6) están indicados por N_i y N_j , con

$$N_i = \frac{X_j - x}{L} \quad \text{and} \quad N_j = \frac{x - X_i}{L} \quad (2.7)$$

La ecuación (2.6) puede reescribirse como

$$\phi = N_i \Phi_i + N_j \Phi_j \quad (2.8)$$

Y también como

$$\phi = [N] \{ \Phi \} \quad (2.9)$$

Donde $[N] = [N_i \quad N_j]$ es un vector fila de la función de forma y

$$\{ \Phi \} = \begin{Bmatrix} \Phi_i \\ \Phi_j \end{Bmatrix}$$

Es un vector columna que contiene los valores nodales del elemento.

Algunos comentarios acerca de cuando las funciones de forma están correctas. Cada función de forma tiene un valor uno en su propio nodo y cero en el otro nodo y las dos funciones formas suman uno. Una tercera característica es que las funciones de forma son siempre polinomios del mismo tipo que la ecuación de interpolación original. La ecuación (2,2) es una ecuación lineal y las funciones de forma son ecuaciones lineales. Si la ecuación de interpolación había sido un modelo cuadrático definido por tres nodos, las funciones de forma resultantes también habría sido ecuaciones cuadráticas. Otra característica es que las derivadas de las funciones de forma con respecto a X suma a cero. Las funciones de forma se muestran en la figura 2,3.

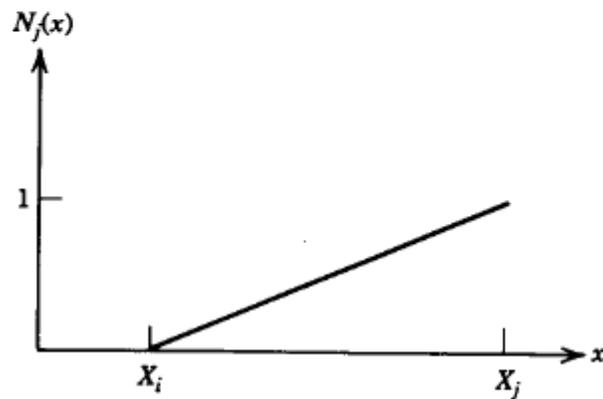
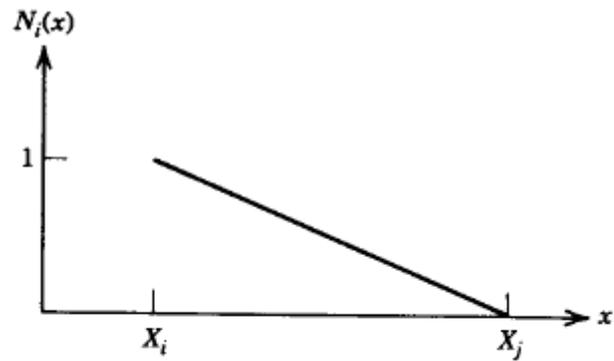


Figure 2.3 The linear shape functions N_i and N_j .

EJEMPLO ILUSTRATIVO

Un elemento lineal unidimensional ha sido utilizado para aproximar la distribución de la temperatura en una aleta. La solución indica que las temperaturas en los nodos i y j son 120 y 90° C, respectivamente. Determinar la temperatura en un punto de 4 cm del origen y el gradiente de temperatura dentro del elemento. Los nodos i y j se ubican en $1,5$ y 6 cm del origen en la Figura 2.4.

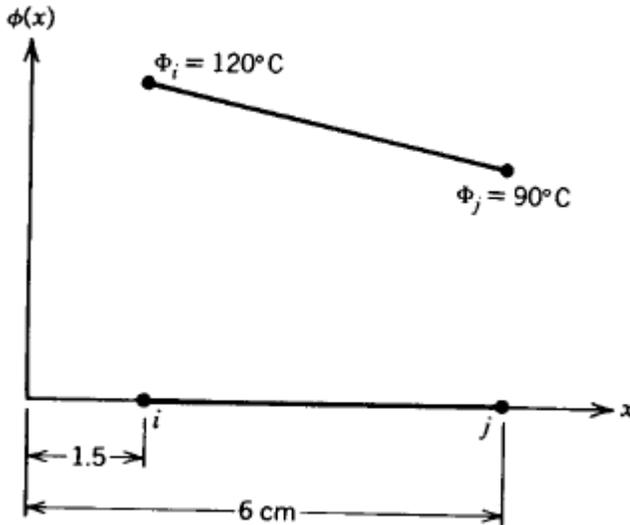


Figure 2.4. Nodal values for the example problem.

La temperatura, ϕ , dentro del elemento esta dada por (2.6)

$$\phi = \left(\frac{X_j - x}{L} \right) \Phi_i + \left(\frac{x - X_i}{L} \right) \Phi_j \quad (2.6)$$

Los datos en el elemento son

$$\begin{array}{ll} X_i = 1.5 \text{ cm} & X_j = 6.0 \text{ cm} \\ \Phi_i = 120^\circ\text{C} & \Phi_j = 90^\circ\text{C} \\ x = 4.0 \text{ cm} & L = 4.5 \text{ cm} \end{array}$$

Sustituyendo resulta

$$\begin{aligned} \phi &= \left(\frac{6 - 4}{4.5} \right) 120 + \left(\frac{4 - 1.5}{4.5} \right) 90 \\ \phi &= 103.3^\circ\text{C} \end{aligned}$$

El gradiente de temperatura es la derivada de (2.6)

$$\frac{d\phi}{dx} = \frac{\Phi_j - \Phi_i}{L} \quad (2.10)$$

Sustituyendo los valores nodales resulta

$$\frac{d\phi}{dx} = \left(\frac{90 - 120}{4.5} \right) = -6.67^\circ\text{C/cm}$$

2,3 UNA ECUACIÓN SUAVE A TROZOS.

Una ecuación continua suave por partes para una región de una dimensión puede ser construida mediante la conexión de varias ecuaciones lineales con las propiedades desarrolladas en la sección anterior. Cada una de estas ecuaciones puede escribirse como

$$\phi^{(e)} = N_i^{(e)}\Phi_i + N_j^{(e)}\Phi_j \quad (2.11)$$

where

$$N_i^{(e)} = \frac{X_j - x}{X_j - X_i} \quad \text{and} \quad N_j^{(e)} = \frac{x - X_i}{X_j - X_i} \quad (2.12)$$

El superíndice (e) indica una cantidad elemento. Todo lo que se necesita para completar el proceso es insertar los valores correctos de i, j, y e para cada elemento. Los valores de i y j para un e correspondiente se obtienen de la red (grilla). El nodo i es el nodo izquierdo de un elemento de información para la cuadrícula en la Figura 2.1 es

e	i	j
1	1	2
2	2	3
3	3	4
4	4	5

La ecuación para cada elemento de la figura 2.1 es

$$\begin{aligned} \phi^{(1)} &= N_1^{(1)}\Phi_1 + N_2^{(1)}\Phi_2 \\ \phi^{(2)} &= N_2^{(2)}\Phi_2 + N_3^{(2)}\Phi_3 \\ \phi^{(3)} &= N_3^{(3)}\Phi_3 + N_4^{(3)}\Phi_4 \\ \phi^{(4)} &= N_4^{(4)}\Phi_4 + N_5^{(4)}\Phi_5 \end{aligned} \quad (2.13)$$

Note que $N_2^{(1)}$ y $N_2^{(2)}$ son ecuaciones diferentes, a pesar de que ambos involucran al nodo 2. Las ecuaciones para estas dos cantidades son

$$N_2^{(1)} = \frac{x - X_1}{X_2 - X_1} \quad \text{and} \quad N_2^{(2)} = \frac{X_3 - x}{X_3 - X_2}$$

Debe cuenta que cada ecuación en 2.13 es para un solo elemento y no es aplicable fuera del elemento. La primera ecuación debería ser escrita como

$$\phi^{(1)} = N_1^{(1)}\Phi_1 + N_2^{(1)}\Phi_2 \quad X_1 \leq x \leq X_2$$

Pero el rango de x se omite en la mayoría de la literatura de elementos finitos y se omite en este libro. Cuando se proporciona una ecuación para un elemento, la implicación es que ésta es válida sólo para este elemento.

2.4 UN COMENTARIO EN LA NOTACIÓN

La necesidad de indicar las cantidades de elementos se produce en la mayoría de las páginas de este libro. La siguiente notación se utiliza para que un superíndice (e) no tenga que ser colocado en cada coeficiente.

1. Cuando los brackets o paréntesis tienen un superíndice (e), es decir, $(G\phi + Q)^{(e)}$, entonces cada término dentro de los corchetes o paréntesis debe interpretarse en un elemento de base.
2. Una cantidad en el lado izquierdo de un signo igual con un superíndice (e) implica que las cantidades en la parte derecha de la señal son para un elemento en particular. Por ejemplo,

$$\phi^{(e)} = N_i\Phi_i + N_j\Phi_j$$

implica que N_i and N_j are really $N_i^{(e)}$ and $N_j^{(e)}$, and that Φ_i and Φ_j son los valores de los elementos nodales.

PROBLEMAS

2.1 Las coordenadas nodales X_i and X_j and the nodal values of Φ_i and Φ_j para varios elementos lineales se dan a continuación. Evaluar ϕ en el valor dado de x. Los valores x son en centímetros, y los de ϕ_i, ϕ_j están en grados Celsius.

	x	X_i	X_j	Φ_i	Φ_j
(a)	0.8	0.0	1.5	60	43
(b)	3.6	3.0	4.5	27	33
(c)	7.1	6.5	7.5	63	51
(d)	1.8	0.5	3.0	0	-15
(e)	2.2	1.0	3.0	60	67

2.2 (a-e) Evaluar df / dx para el elemento correspondiente en el problema 2.1.

2.3 Las funciones de forma para el elemento cuadrático muestra en la Figura P2.3 son

$$N_i = \frac{2}{L^2} (x - X_j)(x - X_k)$$

$$N_j = -\frac{4}{L^2} (x - X_i)(x - X_k)$$

$$N_k = \frac{2}{L^2} (x - X_i)(x - X_j)$$

(a) Demostrar que estas funciones de forma son igual a uno en su propio nodo y son iguales a cero en los otros dos nodos. También muestran que la suma de funciones de forma suman uno.

(b) Demostrar que los derivados de N_i , N_j y N_k con respecto a x suman cero.

$$N_i = \frac{2}{L^2} (x - X_j)(x - X_k)$$

$$N_j = -\frac{4}{L^2} (x - X_i)(x - X_k)$$

$$N_k = \frac{2}{L^2} (x - X_i)(x - X_j)$$

2.4 La aplicación del método de elemento finito requiere la evaluación de las integrales que contienen las funciones de forma o sus derivadas. Evaluar

$$(a) \int_{X_i}^{X_j} N_i dx \quad (b) \int_{X_i}^{X_j} \frac{dN_i}{dx} \frac{dN_j}{dx} dx \quad (c) \int_{X_i}^{X_j} N_j^2 dx$$

para el elemento lineal.

2.5 El sistema de coordenadas mostrado en la Figura P2.5 tiene su origen en el nodo i y un valor de L en el nodo j . Desarrollar las funciones de forma $N_i(s)$ y $N_j(s)$ partiendo con $\phi(s) = a_1 + a_2s$ y resolviendo para a_1 y a_2 .

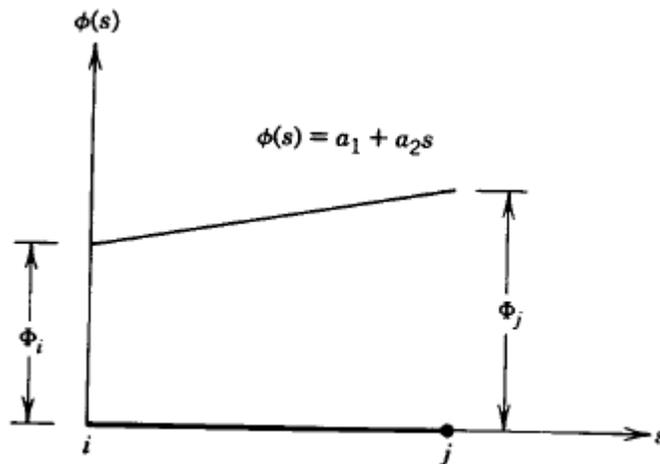


Figure P2.5

2.6 El sistema de coordenadas ξ , que se muestra en la Figura P2.6 es un sistema de coordenada natural cuyo origen está en el centro del elemento. El valor de ξ en los nodos i y j es 1 y -1 , respectivamente. Desarrollar las funciones de forma $N_i(\xi)$ y $N_j(\xi)$ partiendo con $\phi(\xi) = a_1 + a_2\xi$ y resolviendo para a_1 y a_2 .

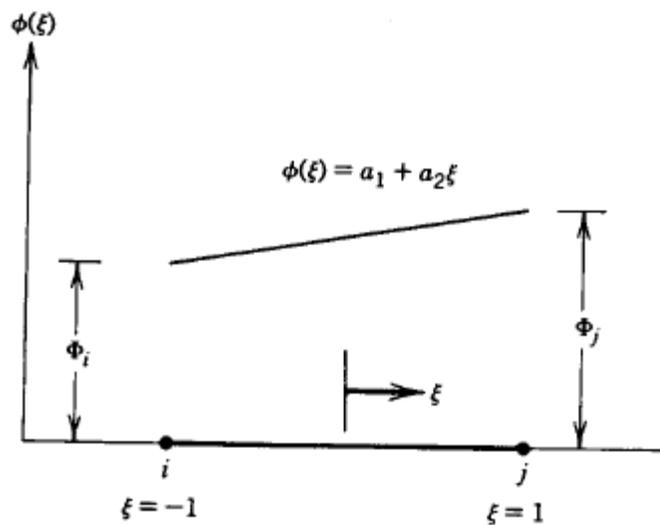


Figure P2.6

2.7 El elemento de viga que se muestra en la Figura P2.7 tiene dos desplazamientos verticales, v_i y v_j , y dos rotaciones θ_i and θ_j , definidos en los puntos extremos. La ecuación del desplazamiento es

$$v = a_1 + a_2x + a_3x^2 + a_4x^3$$

where

$$a_1 = v_i, a_3 = \frac{3}{L^2}(v_j - v_i) - \frac{1}{L}(2\theta_i + \theta_j)$$

$$a_2 = \theta_i, a_4 = \frac{2}{L^3}(v_i - v_j) + \frac{1}{L^2}(\theta_i + \theta_j)$$

Desarrolle las funciones formas para la ecuación de interpolación

$$v(x) = N_1v_i + N_2\theta_i + N_3v_j + N_4\theta_j$$

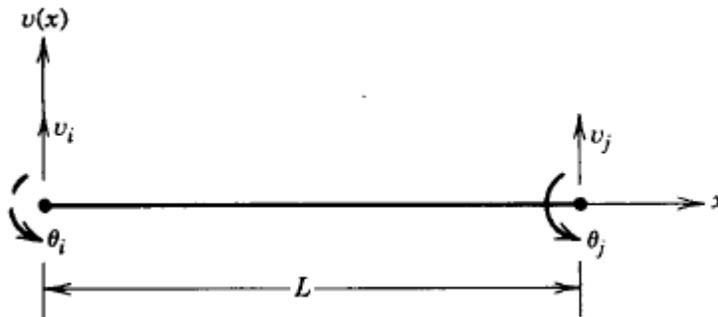


Figure P2.7

2.8 La ecuación para $\phi(x, y)$ en un elemento rectangular de dos dimensiones se muestra en la Figura P2.8 es

$$\phi(x, y) = C_1 + C_2s + C_3t + C_4st$$

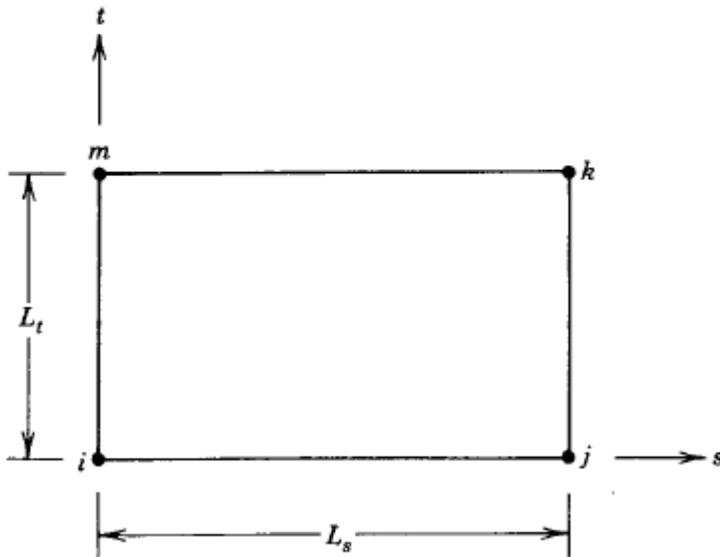


Figure P2.8

Los coeficientes son

$$C_1 = \Phi_i, \quad C_3 = \frac{1}{L_t} (\Phi_m - \Phi_i)$$

$$C_2 = \frac{1}{L_s} (\Phi_j - \Phi_i), \quad C_4 = \frac{1}{L_s L_t} (\Phi_i - \Phi_j + \Phi_k - \Phi_m)$$

donde $\Phi_i, \Phi_j, \Phi_k,$ and Φ_m son los valores nodales de ϕ . Desarrolle las funciones formas para la ecuación de interpolación

$$\phi(x, y) = N_i \Phi_i + N_j \Phi_j + N_k \Phi_k + N_m \Phi_m$$