METODO DE NEWTON RHAPSON

MÉTODO DE NEWTON

El método de Newton es un método iterativo para generar una sucesión x_1, x_2, x_3, ... de aproximaciones a una solución r de una ecuación dada escrita en la forma general

$$f(x) = 0. \tag{5}$$

He aquí el paso general en el proceso. Una vez que tenemos la n-ésima aproximación x_n, usamos la recta tangente en $(x_n, f(x_n))$ para construir la siguiente aproximación x_{n+1} a la solución r como sigue: comenzamos en el punto x_n del eje x. Vamos hacia arriba (o hacia abajo, verticalmente) hasta el punto $(x_n, f(x_n))$ de la curva $y = f(x)$. Entonces, seguimos la recta tangente L hasta el punto en que L interseca al eje x (figura 3.9.3). Ese punto será x_{n+1}.

He aquí una fórmula para x_{n+1}. La obtenemos calculando la pendiente de la recta L de dos formas: con su derivada y mediante la definición de pendiente con dos puntos. Así,

$$f'(x_n) = \frac{f(x_n) - 0}{x_n - x_{n+1}},$$

y podemos despejar fácilmente

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}. \tag{6}$$

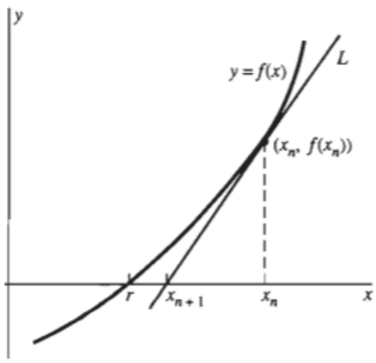

Figura 3.9.3 La geometría de la iteración del método de Newton

En los problemas 1 a 20, use el método de Newton para determinar la solución de la ecuación dada $f(x) = 0$ en el intervalo indicado $[a, b]$ con una precisión de cuatro cifras decimales. Puede elegir la estimación inicial x_0, con base en una gráfica de calculadora o mediante interpolación entre los valores $f(a)$ y $f(b)$.

1. $x^2 - 5 = 0$; $[2, 3]$ (determinar la raiz cuadrada positiva de 5)

2. $x^3 - 2 = 0$; $[1, 2]$ (determinar la raiz cúbica de 2)

3. $x^5 - 100 = 0$; $[2, 3]$ (determinar la raíz quinta de 100)

4. $x^{3/2} - 10 = 0$; $[2, 3]$ (determinar $10^{2/3}$)

5. $x^2 + 3x - 1 = 0$; $[0, 1]$

6. $x^3 + 4x - 1 = 0$; $[0, 1]$

7. $x^6 + 7x^2 - 4 = 0$; $[-1, 0]$

8. $x^3 + 3x^2 + 2x = 10$; $[1, 2]$

9. $x - \cos x = 0$; $[0, 2]$

10. $x^2 - \operatorname{sen} x = 0$; $[0.5, 1.0]$

11. $4x - \operatorname{sen} x = 4$; $[1, 2]$

12. $5x + \cos x = 5$; $[0, 1]$

13. $x^5 + x^4 = 100$; $[2, 3]$

14. $x^5 + 2x^4 + 4x = 5$; $[0, 1]$

15. $x + \tan x = 0$; $[2, 3]$

16. $x + \tan x = 0$; $[11, 12]$

17. $x^3 - 10 = 0$; $[2, 3]$

18. $x^3 - 2x - 5 = 0$ $[2, 3]$ (El ejemplo de Newton)

19. $x^5 - 5x - 10 = 0$; $[1; 2]$

20. $x^5 = 32$; $[0, 5]$

21. (a) Muestre que el método de Newton aplicado a la ecuación $x^3 - a = 0$ produce la iteración

$$x_{n+1} = \frac{1}{3}\left(2x_n + \frac{a}{x_n^2}\right)$$

para aproximar la raiz cúbica de a. (b) Use esta iteración para determinar $\sqrt[3]{2}$ con una precisión de cinco cifras decimales.

22. (a) Muestre que el método de Newton produce la iteración

$$x_{n+1} = \frac{1}{k}\left[(k - 1)x_n + \frac{a}{(x_n)^{k-1}}\right]$$

para aproximar la raíz k – ésima del número positivo a. (b) Use esta iteración para determinar $\sqrt[10]{100}$ con una precisión de cinco cifras decimales.

23. La ecuación (12) tiene la forma especial $x = G(x)$, donde $G(x) = \frac{1}{2}\cos x$. Para una ecuación de esta forma, la fórmula iterativa $x_{n+1} = G(x_n)$ produce *a veces* una sucesión $x_1, x_2, x_3, \ldots$ de aproximaciones que converge a una raíz. En el caso de la ecuación (12), esta fórmula de *sustitución repetida* es simplemente $x_{n+1} = \frac{1}{2}\cos x_n$. Comience con $x_0 = 0.5$ como en el ejemplo 4 y conserve cinco cifras decimales en su cálculo de la solución de la ecuación (12). [*Verifique:* Usted verá que $x_8 \approx 0.45018$.]

24. La ecuación $x^4 = x + 1$ tiene una solución entre $x = 1$ y $x = 2$. Use la estimación inicial $x_0 = 1.5$ y el método de sustitución repetida (véase el problema 23) para descubrir que una de las soluciones de esta ecuación es aproximadamente 1.220744. Itere utilizando la fórmula

$$x_{n+1} = (x_n + 1)^{1/4}.$$

Después compare el resultado con lo que sucede al iterar usando la fórmula

$$x_{n+1} = (x_n)^4 - 1.$$

25. La ecuación $x^3 - 3x^2 + 1 = 0$ tiene una solución entre $x = 0$ y $x = 1$. Para aplicar el método de sustitución repetida (véase el problema 23) a esta ecuación, debe escribirla en la forma

$$x = 3 - \frac{1}{x^2}$$

o en la forma

$$x = (3x^2 - 1)^{1/3}.$$

Si comienza con $x_0 = 0.5$ y espera determinar la solución más cercana (aproximadamente 0.6527) de la ecuación original, usando cada una de las fórmulas iterativas anteriores, verá algunas de las desventajas del método. Describa qué es lo erróneo.

26. Muestre que el método de Newton aplicado a la ecuación

$$\frac{1}{x} - a = 0$$

produce la fórmula iterativa

$$x_{n+1} = 2x_n - a(x_n)^2$$

lo que proporciona un método para aproximar el recíproco $1/a$ sin realizar divisiones. Este método es útil ya que, en la mayoría de las computadoras de alta velocidad, las operaciones de división consumen más tiempo que varias sumas y multiplicaciones.

27. Muestre que la ecuación $x^5 + x = 1$ tiene exactamente una solución real. Use después el método de Newton para determinar ésta con tres cifras correctas a la derecha del punto decimal.

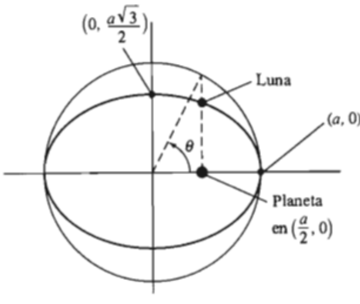

Figura 3.9.16 La órbita elíptica del problema 36

37. Un gran problema de Arquímedes fue el de usar un plano para cortar una esfera en dos segmentos cuyos volúmenes están en una razón dada. Arquímedes mostró que el volumen de un segmento de altura h de una esfera de radio a es $V = \frac{1}{3}\pi h^2(3a - h)$. Si un plano a distancia x del centro de una esfera de radio 1 corta la esfera en dos segmentos, uno de ellos con el doble del volumen del otro, muestre que $3x^3 - 9x + 2 = 0$. Use después el método de Newton para determinar x con una precisión de cuatro cifras decimales.

En los problemas 28 a 30, use el método de Newton para determinar todas las raíces reales de la ecuación dada con dos dígitos correctos a la derecha del punto decimal. [Sugerencia: Para determinar el número de raíces y sus posiciones aproximadas, grafique los lados izquierdo y derecho de la ecuación y observe dónde se intersecan las gráficas.]

28. $x^2 = \cos x$

29. $x = 2\,\text{sen}\,x$

30. $\cos x = -\frac{1}{5}$. (Existen exactamente tres soluciones, como se indica en la figura 3.9.15.)

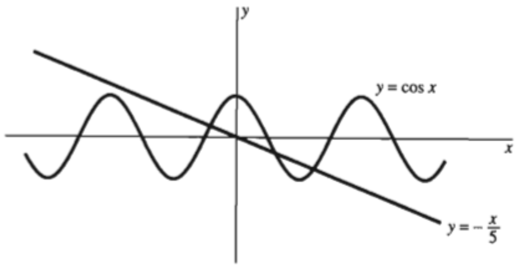

Figura 3.9.15 Resolución de la ecuación del problema 30

31. Muestre que la ecuación $x^7 - 3x^3 + 1 = 0$ tiene al menos una solución. Use después el método de Newton para determinar una solución.

32. Use el método de Newton para aproximar $\sqrt[3]{5}$ con una precisión de tres decimales.

33. Use el método de Newton para determinar el valor de x tal que $x^3 = \cos x$.

34. Use el método de Newton para determinar el valor positivo más pequeño x tal que $x = \tan x$.

35. En el problema 49 de la sección 3.6 nos enfrentamos al problema de minimizar el costo de construcción de una carretera entre dos puntos en lados opuestos de una falla geológica. Este problema nos condujo a la ecuación

$$f(x) = 3x^4 - 24x^3 + 51x^2 - 32x + 64 = 0.$$

Use el método de Newton para determinar, con una precisión de cuatro decimales, la raíz de esta ecuación en el intervalo $[3, 4]$.

36. La luna del planeta Gzyx tiene una órbita elíptica con excentricidad 0.5 y su período de revolución en torno al planeta es de 100 días. Si la luna está en la posición $(a, 0)$ cuando $t = 0$, entonces (figura 3.9.16) el ángulo central después de t días está dado por la *ecuación de Kepler*

$$\frac{2\pi t}{100} = \theta - \frac{1}{2}\,\text{sen}\,\theta.$$

Use el método de Newton para determinar θ si $t = 17$ (días). Sea $\theta_0 = 1.5$ (radianes) y calcule las primeras dos aproximaciones θ_1 y θ_2. Exprese θ_2 en grados.

38. La ecuación $f(x) = x^3 - 4x + 1 = 0$ tiene tres raíces reales distintas. Localícelas calculando los valores de f para $x = -3, -2, -1, 0, 1, 2$ y 3. Use después el método de Newton para aproximar cada una de las tres raíces con una precisión de cuatro decimales.

39. La ecuación $x + \tan x = 0$ es importante en una variedad de aplicaciones; por ejemplo, en el estudio de la difusión del calor. Tiene una sucesión $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ de raíces positivas, con la n – ésima ligeramente mayor que $(n - 0.5)\pi$. Use el método de Newton para calcular α_1 y α_2 con una precisión de tres decimales.