UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA Y C.C.
INGENIERÍA DE EJECUCIÓN
EDO's y MN., 1ER. SEMESTRE 2018.
23/07/2018

GUÍA Nº 4

Sistemas de ecuaciones diferenciales lineales y aplicaciones

1. Pruebe que la solución general del sistema no homogéneo

$$X'(t) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} X(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} t^2 + \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}, \ t \in \mathbb{R}$$

es dada por,

$$X(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1-\sqrt{2} \end{pmatrix} e^{\sqrt{2}t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1+\sqrt{2} \end{pmatrix} e^{-\sqrt{2}t} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} t^2 + \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

2. Considere el sistema $X' = AX$, de dos ecuaciones diferenciales, donde $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. ¿Cuál es la solución general del sistema si se sabe que $\lambda_1 = 1 + 2i$ es un valor propio y $K_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$ es un vector propio asociado a λ_1?

3. Determine la solución general de los sistemas de ecuaciones.

(a) $X'(t) = \begin{pmatrix} -6 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} X(t)$

(b) $X'(t) = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 \\ 4 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} X(t)$

(c) $X'(t) = \begin{pmatrix} 12 & -9 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} X(t)$

(d) $X'(t) = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} X(t)$

(e) $X'(t) = \begin{pmatrix} 1 & -8 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} X(t)$

(f) $X'(t) = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 \\ -1 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} X(t)$

4. La solución general $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ del sistema

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & 0 \\ \alpha & 0 & \beta \\ 0 & \beta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}, \quad \alpha^2 + \beta^2 > 0,$$

describe en cada instante t la posición de una partícula sobre $\mathbb{R}^3$. Pruebe que dicha partícula describe una trayectoria plana que se aproxima, cuando $t \mapsto +\infty$, a una recta de dirección fija.

5. Resuelva el PVI asociado a cada uno de los sistemas.

(a) $X'(t) = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 1 & -1/2 \end{pmatrix} X(t), \quad X(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$

(b) $X'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} X(t), \quad X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$

(c) $X'(t) = \begin{pmatrix} 1 & -12 & -14 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} X(t), \quad X(0) = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ -7 \end{pmatrix}$

(d) $X'(t) = \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} X(t), \quad X(0) = \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \end{pmatrix}$

6. Considere el sistema de dos masas m_i (i=1,2) y dos resortes con constantes k_i (i=1,2) sobre una superficie horizontal, con una fuerza externa dada por $f(t)$ actuando sobre la segunda masa m_2. Sea $x(t)$ el desplazamiento (a la derecha) de la masa m_1 desde su posición de equilibrio estático, y sea $y(t)$ el desplazamiento de la masa m_2 desde su posición estática. Determine el sistema de ecuaciones diferenciales asociados a las posiciones $x(t)$ e $y(t)$, luego resuelva el sistema para $m_1 = 2, m_2 = 1, k_1 = 4, k_2 = 2$ y $f(t) = 40\sin(3t)$.

   Indicación. Aplique la ley de movimiento de Newton al sistema masa-resorte, para describir el sistema de ecuaciones diferenciales.

7. Considere dos tanques con salmuera conectados por medio de dos conexiones. El tanque 1 posee $x(t)$ lb (libras) de sal en 100 gal (galones) de salmuera, y el tanque 2 contiene $y(t)$ lb de sal en 200 gal de la solución. La salmuera en cada tanque se mantiene uniforme por agitación, y se bombea desde el tanque 1 hacia el tanque 2 a 30 gal/min y desde el tanque 2 hacia el tanque 1 a 10 gal/min. En la configuración del problema se agrega agua fresca que fluye dentro del tanque 1 a 20 gal/min, y la salmuera en el tanque 2 fluye hacia afuera a 20 gal/min (de tal manera que el volumen total de la solución en los dos estanques permanece constante). Determine el sistema de ecuaciones diferenciales asociados a $x(t)$ e $y(t)$ de sal en los dos tanques en el instante t, y luego resuelva el sistema obtenido.

8. Considere la red eléctrica formada por dos circuitos unidos: El primer circuito (lado izquierdo) posee un voltaje $E_0 = 100$ volts, $L = 2$ henries, $R_1 = 50$ ohms (lado común con el segundo circuito) e $I_1(t)$ denota la corriente en la dirección indicada a través del inductor L y en cuanto al segundo circuito (lado derecho) posee $C = 0,008$ faradios, $R_2 = 25$ ohms y $I_2(t)$ representa la corriente a través del resistor R_2. Además la corriente a través del resistor R_1 es $I(t) = I_1(t) - I_2(t)$. Determine y resuelva el sistema de ecuaciones diferenciales para $I_1(t), I_2(t)$.

   Indicación. Aplique la ley Kirchhoff y las caídas de voltaje a través de los elementos comunes del circuito.

9. Suponga que la trayectoria $\gamma(t) := (x(t), y(t))$ de una partícula que se mueve en el plano satisface el problema de valor inicial

$$\begin{aligned} x'' - 2y' + 3x &= 0 \\ y'' + 2x' + 3y &= 0, \end{aligned}$$

   con condiciones $x(0) = 4, y(0) = x'(0) = y'(0) = 0$. Determine las soluciones $x(t)$ e $y(t)$, y verifique que $\gamma(t)$ describe la hipocicloide trazada por un punto $P = (x, y)$ fijo en la circunferencia de un círculo de radio $r = 1$, que gira internamente alrededor de un círculo de radio $R = 4$. Si $P = (x, y)$ inicia en $A = (R, 0)$ cuando $t = 0$, entonces el parámetro t denota el ángulo formado entre el punto A, el origen y el centro del círculo menor.

10. **Sistema abierto de tanques.** Considere tres tanques de salmuera conteniendo V_i (i=1,2,3) gal de la solución, respectivamente. Agua fresca fluye hacia el tanque 1, mientras que la salmuera mezclada fluye desde el tanque 1 hasta el tanque 2, desde éste hacia el tanque 3 y sale finalmente de este último. Represente con $x_i(t)$ la cantidad (en lb) de sal en el tanque i en el instante t para $i = 1, 2, 3$. Si cada razón de flujo es de r gal/min, entonces un cálculo simple de las concentraciones de sal, permite obtener el sistema de 1er. orden (justifique):

$$\begin{aligned} x_1' &= -k_1 x_1 \\ x_2' &= k_1 x_1 - k_2 x_2 \\ x_3' &= k_2 x_2 - k_3 x_3, \end{aligned} \tag{1}$$

   donde $K_1 = \frac{r}{V_i}$, para $i = 1, 2, 3$. Determine la cantidad de sal en cada uno de los tanques en el instante $t \geq 0$, si $V_1 = 20, V_2 = 40, V_3 = 50, r = 10 gal/min$, y las cantidades iniciales de sal en los tres tanques de salmuera (en lb), son

$$x_1(0) = 15, \quad x_2(0) = x_3(0) = 0.$$

11. **Sistema cerrado de tanques.** Considere un sistema cerrado de tres estanques de salmuera con volúmenes V_i para $i = 1, 2, 3$. La diferencia entre este sistema y el sistema abierto del ejercicio anterior es que ahora el flujo que entra al tanque 1 es el que sale del tanque 3. Siguiendo la misma notación del ejercicio anterior, la ecuación (1) se modifica en (justifique):

$$\begin{aligned} x_1' &= -k_1x_1 + k_3x_3 \\ x_2' &= k_1x_1 - k_2x_2 \\ x_3' &= k_2x_2 - k_3x_3, \end{aligned} \tag{2}$$

donde $K_1 = \frac{r}{V_i}$, para $i = 1, 2, 3$. Determine la cantidad de sal en cada uno de los tanques en el instante $t \geq 0$, si $V_1 = 50, V_2 = 25, V_3 = 50, r = 10gal/min$.

12. Utilice el método de los coeficientes indeterminados para los siguientes sistemas.

(a) $X'(t) = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} X(t) + \begin{pmatrix} \sin(t) \\ -2\cos(t) \end{pmatrix}$.

(b) Resuelva $X'(t) = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} X(t) + \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, con la condición inicial $X(0) = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \end{pmatrix}$.

(c) $\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -R_1/l_1 & -R_1/l_1 \\ -R_1/l_2 & -(R_1+R_2)/l_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} E/l_1 \\ E/l_2 \end{pmatrix}$, donde $R_1 = 2\Omega, R_2 = 3\Omega, l_1 = 1h, l_2 = 2h, E = 60V, i_1(0) = i_2(0) = 0$.

13. Considere el problema no homogéneo $Y' = AY + B(t), Y(0) = Y_0$, donde

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 8 & -2 \end{pmatrix},\ B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ e^t \end{pmatrix},\ Y_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}. \tag{3}$$

(a) Use el método de variación de parámetros para resolver el sistema (3).

(b) Resuelva el sistema (3) buscando una solución particular $Y_p(t) = e^{\alpha t}p(t)$, con $p(t)$ un polinomio (en cada componente).

14. Utilice el método de variación de parámetros para resolver el sistema dado.

(a) $X'(t) = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 3/4 & -1 \end{pmatrix} X(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{t/2}$.

(b) Resuelva $X'(t) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} X(t) + \begin{pmatrix} 1/t \\ 1/t \end{pmatrix}$, con la condición inicial $X(1) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

(c) $\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(R_1+R_2)/l_2 & R_2/l_2 \\ R_2/l_1 & -R_2/l_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} E/l_2 \\ 0 \end{pmatrix}$, donde $R_1 = 8\Omega, R_2 = 3\Omega, l_1 = 1h, l_2 = 1h, E(t) = 100\sin(t)V, i_1(0) = i_2(0) = 0$.

15. En una población de N individuos, existen dos variantes de un gen B y b presentes en proporciones $p, q > 0$ respectivamente, tal que $p + q = 1$. A medida que evoluciona y se mezcla la población, ésta no varía en n° y puede dividirse en todo instante en la forma $x(t) + y(t) + z(t) = N$, donde $x(y), y(t), z(t)$ representan el n° de individuos de los tres tipos de combinaciones posibles BB, Bb y bb respectivamente.
La evolución de las poblaciones puede modelarse por el siguiente sistema lineal:

$$\begin{aligned} x' &= -qx + \frac{p}{2}y \\ y' &= qx - \frac{1}{2}y + pz \\ z' &= \frac{q}{2}y - pz \end{aligned} \tag{4}$$

(a) Describa (4) como un sistema lineal homogéneo de matriz A.

(b) Pruebe que la matriz A tiene un valor propio $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_i < 0$ (i=2,3) independientes de p, q.

(c) Usando lo anterior, pruebe que cuando $t \mapsto +\infty$ el sistema (4) converge a un estado que es proporcional a un vector propio v_1 de A asociado a $\lambda_1 = 0$ (llamado estado de equilibrio).

(d) Determine v_1 en término de p y q, y luego verifique que en el equilibrio se tiene que $x : y : z = p^2 : 2pq : q^2$.

(e) Usando lo anterior, si en una población en equilibrio con $N = 900$ se observa la población $z = 100$, estime las poblaciones de equilibrio de x e y.