

1 Ecuaciones Diferenciales Ordinarias Elementales

1. Determine las soluciones de las siguientes ecuaciones diferenciales:

- (a) $y' = t \sin^2(y)$.
- (b) $y' = 2(t+1)\sqrt{y-1}$.
- (c) $t(y^2 - 1)dt - y(t^2 - 1)dy = 0$, $t \neq \pm 1$.
- (d) $y' = ty + 2t - y - 2$.

2. (**Ley de enfriamiento de Newton**). Cuando la diferencia de temperaturas entre un cuerpo y el medio ambiente es pequeña, el calor transferido en una unidad de tiempo hacia el cuerpo o desde el cuerpo es proporcional a la diferencia de temperatura entre el cuerpo (T) y el ambiente (T_A). La EDO que modela la variación de temperatura de un cuerpo en función del tiempo es (suponiendo T_A constante):

$$T'(t) = k(T_A - T(t)), \quad (1)$$

donde k es una constante que depende del área, calor específico y masa del cuerpo. Si $T(0) = T_0$ es la temperatura inicial del cuerpo, y suponiendo que $T_0 > T_A$, determine la solución general de (1).

3. (**Vida media del plutonio**). Un reactor de cría convierte uranio 238 relativamente estable en el isótopo plutonio 239. Después de 17 años, se ha determinado que 0.05% de la cantidad inicial A_0 de plutonio se ha desintegrado. Determine la vida media de ese isótopo, si la razón de desintegración es proporcional a la cantidad que queda.

4. (a) Justifique que la ecuación

$$2ty + (1 + t^2)y' = 0,$$

es una **ecuación exacta**. Determine además la solución general asociada.

- (b) Pruebe que la ecuación

$$y^2 + 2ty - t^2y' = 0 \quad (2)$$

no es exacta. Determine un factor integrante $\mu(t, y)$ de (2), y calcule así una solución general de la ecuación equivalente.

5. Determine un factor integrante para las siguientes **ecuaciones lineales**, y luego resuelva.

- (a) $2ty' - 4y = t^2$, $t \neq 0$.
- (b) $2ty + 3t^2y' = 0$, $t \neq 0$.
- (c) $(3 - 2y \sin(t))dt + \cos(t)dy = 0$, $t \neq (k + \frac{1}{2})\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

6. Determine la solución general, $y(t)$, de la **ecuación lineal**

$$y' + y = b(t), \quad b \in \mathcal{C}(\mathbb{R}; \mathbb{R}).$$

Pruebe que, si existe $\lim_{t \rightarrow +\infty} b(t) := l$ (sea finito o infinito), entonces se satisface que $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) := l$.

7. Verifique que la ecuación $yf(ty) + tg(ty)y' = 0$ admite a

$$\mu(t, y) := \frac{1}{tyf(ty) - tyg(ty)}, \quad (3)$$

como factor integrante, siempre que $tyf(ty) - tyg(ty) \neq 0$. Caso contrario, si $tyf(ty) - tyg(ty) = 0$, entonces la ecuación es equivalente a la **ecuación de variable separables**

$$y + ty' = 0,$$

cuyas soluciones son $ty = c, c \in \mathbb{R}^+$.

Utilice el tipo de factor integrante (3), para resolver las siguientes ecuaciones:

- (a) $y(t^2y^2 + 2) + t(2 - 2t^2y^2)y' = 0$,
- (b) $y(2ty + 1)dt + t(1 + 2ty - t^3y^3)dy = 0$.

8. Pruebe que el cambio de variable $y = tz$ transforma la **ecuación homogénea**

$$y' = f\left(\frac{y}{t}\right), \quad t > 0,$$

es una **ecuación de variables separables**. Aplique dicho resultado, a la resolución de la ecuación

$$y' = \frac{t + y}{t - y}.$$

9. (a) Pruebe que si la ecuación $F(t, y, y', y'') = 0$ es homogénea de grado $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces el cambio de variable dependiente $y(t) = e^{\int z(t)dt}$, reduce el orden de la ecuación en una unidad.
(b) Utilizando la reducción de orden del apartado precedente, resuelva la ecuación $yy'' = t(y')^2$.

10. Determine la solución general de las siguientes **ecuaciones de Bernoulli**

- (a) $y' + \frac{y}{t+1} - \frac{1}{2}(t+1)^3y^3$;
- (b) $ty' + y = t^4y^3$;
- (c) $ty' + 6y = 3ty^{4/3}$;
- (d) $(ty + t^2y^3)y' = 1$. (Sug. Pruebe que esta ecuación es de Bernoulli en la variable t .)

11. Determine la solución general de las siguientes **ecuaciones de Riccati**

- (a) $y' = (1-t)y^2 + (2t-1)y - t$, sabiendo que $y_0(t) = 1$ es una solución particular de la ecuación;
- (b) $y' = -8ty^2 + 4t(4t+1)y - 8t^3 - 4t^2 + 1$, sabiendo que posee una solución particular que es un polinomio;
- (c) $y' = 2\tan(t)\sec(t) - y^2\sin(t)$, sabiendo que $y_0(t) = \sec(t)$ es una solución particular;
- (d) $y' + y^2 = 1 + t^2$, comenzando por determinar una solución particular $y_0(t)$ de esta ecuación.

12. (**Trayectorias ortogonales**). Si denotamos por x la variable independiente

- (a) Pruebe que la familia de circunferencias $x^2 + y^2 = c^2$, son soluciones de la ecuación diferencial $x + yy' = 0$.

- (b) Pruebe que las curvas solución de la ecuación $y' = f(x, y)$ se cortan perpendicularmente con las curvas solución de $y' = -1/f(x, y)$.
- (c) Determine la familia de las curvas que cortan ortogonalmente a la familia de las circunferencias con centro en el origen.

13. (**Trayectorias formando un ángulo**).

- (a) Pruebe que las curvas solución de la ecuación

$$y' = \frac{f(x, y) + \tan(w)}{1 - f(x, y) \tan(w)},$$

se cortan formando un ángulo w con las curvas solución de $y' = f(x, y)$.

- (b) Determine la familia de las curvas que corta a la familia de las rectas $y = cx$ (que pasa por el origen) según un ángulo de $\pi/4$.