UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA Y C.C.
INGENIERÍA DE EJECUCIÓN
EDO's y MN., 1ER. SEMESTRE 2018.
05/04/2018

GUÍA Nº 2

Métodos Numéricos sobre Problemas de Valor inicial para EDO's

1. Pruebe que cada uno de los siguientes PVI's tiene una única solución, y determine la solución en cada caso.
   (a) $y' = y\cos(t)$, $t \in [0,1]$, $y(0) = 1$.
   (b) $y' = e^{t-y}$, $t \in [0,1]$, $y(0) = 1$.
   (c) $y' = \dfrac{ty+y}{ty+t}$, $t \in [2,4]$, $y(2) = 4$.
   (d) $y' = \dfrac{4t^3y}{1+t^4}$, $t \in [0,1]$, $y(0) = 1$.

2. Para cada elección de $f(t,y)$ dados por
$$f(t,y) = t^2y+1;\ f(t,y) = -ty + \frac{4t}{y};\ f(t,y) = \frac{1+y}{1+t};\ f(t,y) = \frac{y^2}{1+t}.$$
   (a) ¿Satisface f una condición *Lipschitz* sobre $D := \{(t,y) : 0 \le t \le 1, y \in \mathbb{R}\}$?
   (b) Pruebe que el problema de valor inicial
$$y' = f(t,y), \quad t \in [0,1],\ y(0) = 1,$$
   es **bien planteado**.
   Observación: Sea el conjunto convexo $D := \{(t,y) : a \le t \le b, y \in \mathbb{R}\}$. Si $f \in C(D)$ y satisface la condición tipo Lipschitz en la variable y en D, entonces el PVI
$$y'(t) = f(t,y),\ a \le t \le b,\ y(a) = a_0 \in \mathbb{R},$$
   es **bien planteado**.

3. Mostrar que la ecuación dada implícitamente define una solución. Aproxime $y(2)$, usando el **método de Newton**.
   (a) $y' = -\dfrac{y^2+y}{(3y^2+1)t}$, $t \in [1,2]$, $y(1) = 1$; $y^3t + yt = 2$.
   (b) $y' = -\dfrac{y\cos(t) + 2te^y}{\sin(t) + t^2e^y + 2}$, $t \in [1,2]$, $y(1) = 0$; $y\sin(t) + t^2e^y + 2y = 1$.

4. **Método de Picard** para resolver el PVI,
$$y' = f(t,y), \quad t \in [a,b],\ y(a) = \alpha,$$

es descrito del siguiente modo: Sea $y_0(t) = \alpha$ para cada $t \in [a, b]$. Se define una sucesión $\{y_k(t)\}_{k\in\mathbb{N}}$ de funciones por

$$y_k(t) = y_0(t) + \int_a^t f(s, y_{k-1}(s))ds, \quad k \in \mathbb{N} \tag{1}$$

(a) Integre $y' = f(t, y(t))$, y use la condición inicial para obtener (1).

(b) Genere los términos $y_0(t), y_1(t), y_2(t)$ e $y_3(t)$ para el PVI

$$y' = -y + t + 1, \quad t \in [0, 1], y(0) = 1.$$

Método de Euler:

5. Use el **método de Euler** para aproximar las soluciones para cada uno de los siguientes PVI's.

   (a) $y' = 1 + (t - y)^2$, $2 \le t \le 3$, $y(2) = 1$, con $h = 0,5$.

   (b) $y' = \dfrac{1 + t}{1 + y}$, $1 \le t \le 2$, $y(1) = 2$, con $h = 0,5$.

   (c) $y' = \dfrac{\sin(2t) - 2ty}{t^2}$, $1 \le t \le 2$, $y(1) = 2$, con $h = 0,25$.

6. Las soluciones exactas a los PVI's en ejercicio 5. son dados aquí. Compare el *error real* en cada paso con la *cota de error*.

   (a) $y(t) = t + \dfrac{1}{1 - t}$.

   (b) $y(t) = \sqrt{t^2 + 2t + 6} - 1$.

   (c) $y(t) = \dfrac{4 + \cos(2) - \cos(2t)}{2t^2}$.

   Observación: Si f es continua y satisface la condición de Lipschitz con constante l sobre

   $$D := \{(t, y) : a \le t \le b, y \in \mathbb{R}\},$$

   y además existe $M > 0$ tal que $|y''(t)| \le M$, para cada $t \in [a, b]$. Denotamos por $y(t)$ la única solución del PVI

   $$y'(t) = f(t, y), \quad t \in [a, b],\ y(a) = a_0 \in \mathbb{R},$$

   y sean $w_0, \dots, w_N$ las aproximaciones generadas por el método de Euler... para algún $N \in \mathbb{N}$. Entonces para $i = 0, 1, \dots, N$ se tiene la siguiente *cota de error*

   $$|y(t_i) - w_i| \le \frac{hM}{2l}(e^{l(t_i - a)} - 1).$$

7. Dado el PVI

   $$y' = \frac{1}{t^2} - \frac{y}{t} - y^2,\ 1 \le t \le 2, y(1) = -1,$$

   con solución exacta $y(t) = -1/t$:

   (a) Use el método de Euler con $h = 0,05$ para aproximar la solución, y compare esto con los valores reales de y.

   (b) Determine el valor de h necesario para obtener que $|y(t_i) - w_i| \le 0,05$.

Métodos de Runge-Kutta:

8. Use el **método de Euler modificado** para aproximar las soluciones en cada uno de los siguientes PVI's, y compare los resultados con los valores exactos.

   (a) $y' = e^{t-y}$, $0 \leq t \leq 1$, $y(0) = 1$, con tamaño de paso $h = 0,5$; la solución es exacta es $y(t) = \ln(e^t + e - 1)$.

   (b) $y' = -y + ty^{1/2}$, $2 \leq t \leq 3$, $y(2) = 2$, con tamaño de paso $h = 0,25$; la solución es exacta es $y(t) = (t - 2 + \sqrt{2}ee^{-t/2})^2$.

9. Repita el ejercicio 8, aplicando el **método de Heun**.

10. Repita el ejercicio 8, aplicando el **método del punto medio**.

11. Repita el ejercicio 8, aplicando el **método RK4**.

12. Pruebe que el **método del punto medio** y el **método de Euler modificado** dan las mismas aproximaciones al PVI
$$y' = -y + t + 1, \quad 0 \leq t \leq 1,\ y(0) = 1,$$
para cada tamaño de paso h. ¿Por qué esto es verdad?

13. Fluye agua de un tanque cónico invertido provisto de un orificio circular, con una velocidad
$$\frac{dx}{dt} = -0,6\pi r^2 \sqrt{2g}\frac{\sqrt{x}}{A(x)},$$
donde r es el radio del orificio, x es la altura del nivel del líquido medido desde el vértice del cono y $A(x)$ denota el area de la sección transversal del tanque, a x unidades por arriba del orificio. Suponga que $r = 0,1$ pies, $g = 32,1$ pie/s^2, y que el tanque tiene un nivel inicial de agua de 8 *pies* y un volumen inicial de $512(\pi/3)$ $pies^3$.

    (a) Determine el nivel de agua después de 10 min. con $h = 20s$.

    (b) Calcule, con una exactitud de 1 min., cuándo se vaciará el tanque.