

Guía 4: Aplicaciones de EDOs de primer orden

- I. Suponga que la población P de bacterias en un cultivo en el instante de tiempo t cambia a una razón proporcional a $P^2 - P$. Asuma que $P^2 - P > 0$.
- 1.1) Sea k la constante de proporcionalidad. Escriba una ecuación diferencial para $P(t)$ y obtenga la solución general.
 - 1.2) Encuentre la solución si hay 1000 bacterias en el instante inicial $t = 0$ horas.
 - 1.3) Determine la constante k suponiendo además que hay 100 bacterias en $t = 5$ horas.
 - 1.4) Determine $\lim_{t \rightarrow \infty} P(t)$.
- II. Obtenga una expresión general para el volumen V de un gas como función de la presión p si la velocidad de variación del volumen con respecto a la presión es proporcional a $-V/p^2$.
- III. Ley de Acción de Masas: Sea A y B dos compuestos con α y β sus concentraciones fijas, respectivamente. Supongamos que reaccionan para dar origen a un compuesto M con concentración $x(t)$ que varía a medida que transcurre el tiempo. Si la temperatura se mantiene constante, la tasa de crecimiento de la concentración del compuesto M es proporcional al producto de las concentraciones de los compuestos A y B que reaccionan. La reacción química que describimos anteriormente será:



Un modelo de EDO que describa la reacción es:

$$x'(t) = k(\alpha - x)(\beta - x), \quad k > 0.$$

Suponga que $\alpha > \beta$, demuestre que $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = \beta$.

Indicación: Resuelva la EDO por separación de variables.

- IV. La ley de enfriamiento de Newton señala que la tasa a la cual se enfría un cuerpo es proporcional a la diferencia de temperatura entre el cuerpo y el medio que lo rodea. Se coloca un objeto con una temperatura de 90 grados Fahrenheit en un medio con una temperatura de 60 grados. Diez minutos después, el objeto se ha enfriado a 80 grados Fahrenheit. ¿Cuál será la temperatura del cuerpo después de estar en este ambiente durante 20 minutos? ¿En cuánto tiempo llegará a 65 grados Fahrenheit la temperatura del cuerpo?
- V. Un termómetro se lleva al exterior de una casa donde la temperatura ambiente es de 70 grados Fahrenheit. Al cabo de 5 minutos, el termómetro registra 60 grados Fahrenheit y, 5 minutos después, registra 54 grados Fahrenheit. ¿Cuál es la temperatura del exterior?
- VI. Un tanque de 500 galones contiene inicialmente 100 galones de solución salina en la que se ha disuelto 5 libras de sal. Se agrega solución salina que contiene 2 libras/galón a razón de 5 galones/minuto, y la mezcla sale del tanque a razón de 3 galones/minuto. Determine cuánta sal hay en el tanque al momento que se desborda.

- VII. Un recipiente de 30 litros de capacidad contiene inicialmente 10 litros de solución salina en la que se ha disuelto 100 gramos de sal. Se agrega solución salina con concentración de 20 gramos/litro a razón de 5 litros/minuto, y simultáneamente la mezcla sale del recipiente a razón de 1 litro/minuto.
- 7.1) Determine la cantidad de sal que hay en el recipiente para cualquier tiempo $t \geq 0$.
- 7.2) Determine la concentración de sal en el recipiente al momento que este se desborda.
- VIII. Suponga que la velocidad v de un barco costero en el agua satisface la ecuación diferencial $dv/dt = kv^2$. La velocidad inicial de la embarcación es $v(0) = 10m/s$ y v disminuye a razón de $1m/s^2$ cuando $v = 5m/s$. ¿Cuánto tiempo transcurrirá para que la velocidad del barco disminuya a $1m/s$? ¿y a $1/10m/s$, ¿ Cuándo se detiene el barco?