UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIA, DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA Y C.C.
ECUACIONES DIFERENCIALES Y MÉTODOS NUMÉRICOS

Guía 5: Aproximación numérica de PVI de primer orden

- Método de Euler:
$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i).$$
- Método implícito de Runge-Kutta segundo orden:
$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}[f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1})]$$
- Método de Heun:
$$\begin{aligned} y_{i+1} &= y_i + \frac{h}{2}(K_1 + K_2) \\ K_1 &= f(x_i, y_i), \qquad K_2 = f(x_i + h, y_i + hK_1) \end{aligned}$$
- Método de Runge-Kutta de cuarto orden:
$$\begin{aligned} y_{i+1} &= y_i + \frac{h}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4) \\ K_1 &= f(x_i, y_i) \qquad K_2 = f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}K_1\right) \\ K_3 &= f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}K_2\right) \qquad K_4 = f\left(x_i + h, y_i + hK_3\right) \end{aligned}$$

I. En cada uno de los siguientes PVI, aplique el método de Euler para aproximar el valor pedido:

a. $y' = te^{3t} - 2y,\ y(0) = 0$, aproximar $y(0,1)$, utilice un $h = 0{,}1$.
b. $y' = 1 + (t - y)^2,\ y(2) = 1$, aproximar $y(1,9)$.
c. $y' - \frac{y}{t} = 1,\ y(1) = 2$, aproximar $y(1,5)$, utilice un $h = 0,5$.
d. $y' = \cos(2t) + \sin(3t),\ y(0) = 1$, aproximar $y(0,2)$, use 2 pasos.

II. En cada uno de los siguientes PVI, aplique el método de Heun y el método implícito de Runge-Kutta de orden 2 para aproximar $y(0,5)$:

e. $y' = \frac{y}{t} - \left(\frac{y}{t}\right)^2,\ y(1) = 1$, utilice un $h = -0,5$.
f. $y' = 1 + \frac{y}{t} + \left(\frac{y}{t}\right)^2,\ y(1) = 0$, utilice un $h = -0,25$.
g. $y' = -(y + 1)(y + 3),\ y(0) = -2$, utilice un paso que estime conveniente.
h. $y' = -5y + 5t^2 + 2t,\ y(0) = 1/3$, utilice un $h = 0,5$.

Indicación: Para aproximar la raíz de una ecuación no lineal se puede utilizar el Método de Newton-Raphson:
$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}.$$

III. Repita el ejercicio I utilizando para su aproximación el método de Runge-Kutta de orden 4.

IV. A continuacón se presentan las soluciones exactas de los PVI de los ejercicios I., II. y III., calcule el error de sus aproximaciones.

a. $y(t) = \frac{1}{5}te^{3t} - \frac{1}{25}e^{3t} + \frac{1}{25}e^{-2t}$

b. $y(t) = t + \frac{1}{1-t}$

c. $y(t) = t\ln(t) + 2t$

d. $y(t) = \frac{1}{2}\operatorname{sen}(2t) - \frac{1}{3}\cos(3t) + \frac{4}{3}$

e. $y(t) = \frac{1}{1+\ln(t)}$

f. $y(t) = t\tan(\ln(t))$

g. $y(t) = -3 + \frac{2}{1+e^{-2t}}$

h. $y(t) = t^2 + \frac{1}{3}e^{-5t}$

V. Dado el siguiente PVI:

$$y'(x) + y(x) = x + 1, \qquad y(0) = 0.$$

5.1) Aproxime $y(0,2)$ utilizando el método de Euler.

5.2) Aproxime $y(0,2)$ utilizando el método de Runge-Kutta de orden 4.

5.3) Resuelva el PVI y calcule el error de su aproximación. Comente el error.

VI. Dado el siguiente PVI:

$$y'(t) = -y(t) + t + 1, \qquad y(0) = 1.$$

6.1) Resuelva el PVI.

6.2) Aproxime $y(0,5)$ con el método que estime conveniente.

6.3) ¿Cuál es el valor mínimo de paso que se debe dar con el método de Euler para que al aproximar $y(0{,}5)$ el error porcentual sea menor al $5\,\%$?.