

Guía 6: Ecuaciones diferenciales lineales de orden superior (1era parte)

- I. En cada uno de los siguientes problemas, a) verifique que y_1 y y_2 son soluciones de la ecuación diferencial; b) utilice el Wronskiano para demostrar que y_1 y y_2 son linealmente independientes; c) escriba la solución general de la ecuación diferencial; y d) obtenga la solución única del problema de valor inicial.

1.1) $y'' - k^2y = 0$; $y_1(x) = \cosh(kx)$, $y_2(x) = \sinh(kx)$; $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$

1.2) $y'' + k^2y = 0$; $y_1(x) = \sin(kx)$, $y_2(x) = \cos(kx)$; $y(\pi) = 0$, $y'(\pi) = 1$

1.3) $y'' + 4y' - 12y = 0$; $y_1(x) = e^{2x}$, $y_2(x) = e^{-6x}$; $y(0) = 1$, $y'(0) = -1$

1.4) $y'' + 11y' + 24y = 0$; $y_1(x) = e^{-8x}$, $y_2(x) = e^{-3x}$; $y(0) = 2$, $y'(0) = -4$

1.5) $y'' - y' - 6y = 0$; $y_1(x) = e^{-2x}$, $y_2(x) = e^{3x}$; $y(-1) = 3$, $y'(-1) = 6$

1.6) $y'' + 11y' - 42y = 0$; $y_1(x) = e^{3x}$, $y_2(x) = e^{-14x}$; $y(0) = -5$, $y'(0) = 0$

- II. En cada uno de los problemas, obtenga una segunda solución de la ecuación diferencial que sea linealmente independiente con la solución y_1 . Luego escriba la solución general.

2.1) $y'' - y = 0$; $y_1(x) = e^x$

2.2) $x^2y'' - 3xy' + 4y = 0$; $y_1(x) = x^2$, $x > 0$

2.3) $y'' + 2y' + y = 0$; $y_1(x) = xe^{-x}$

2.4) $y'' + 16y = 0$; $y_1(x) = \cos(4x)$

2.5) $y'' - y = 0$; $y_1(x) = \cosh(x)$

2.6) $x^2y'' - 7xy' + 16y = 0$; $y_1(x) = x^4$

2.7) $x^2y'' - xy' + 2y = 0$; $y_1(x) = x\sin(\ln x)$, $x > 0$

2.8) $(1 - 2x - x^2)y'' + 2(1 + x)y' - 2y = 0$; $y_1(x) = x + 1$

- III. Obtenga la solución general de las siguientes ecuaciones diferenciales lineales homogéneas de coeficientes constantes:

3.1) $y'' - y' - 6y = 0$

3.5) $(D^3 - 3D^2 - 10D)y = 0$

3.2) $y'' + 6y - 40y = 0$

3.6) $y''' + y'' - 4y' - 4y = 0$

3.3) $(D^2 + 2D)y = 0$

3.7) $y''' - y'' + y' - y = 0$

3.4) $(D^2 - 5D + 6)y = 0$

3.8) $y'' - 4y' + 8y = 0$

- IV. Encuentre la solución del problema de valores iniciales:

4.1) $y'' + 3y' = 0$; $y(0) = 3$, $y'(0) = 6$

4.4) $y'' - 2y' - 3y = 0$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 3$

4.2) $y'' + 2y' - 3y = 0$; $y(0) = 0$, $y'(0) = -2$

4.5) $y'' - 4y' + 4y = 0$; $y(0) = 3$, $y'(0) = 5$

4.3) $y'' + 2y' - 3y = 0$; $y(0) = y'(0) = 1$

4.6) $y'' + y' + y = 0$; $y(0) = 2$, $y'(0) = 0$

V. Encuentre la solución general de la ecuación diferencial empleando el método de los coeficientes indeterminados.

$$5.1) \quad y'' - y' - 2y = 2x^2 + 5$$

$$5.2) \quad y'' - y = x^3 - 4x^2 + 11x + 9$$

$$5.3) \quad y'' + 4y = 8x^3 - 20x^2 + 16x - 18$$

$$5.4) \quad y'' - 2y' + 10y = 2x^2 + 2x - 8$$

$$5.5) \quad y'' - 6y' + 8y = 3e^x$$

$$5.6) \quad y'' - y' - 6y = 8e^{2x}$$

$$5.7) \quad y'' + 6y' + 9y = 9 \cos(3x)$$

$$5.8) \quad y'' - 4y' + 13y = 3e^{2x} - 5e^{3x}$$

$$5.9) \quad y'' - 4y' = 8x^2 + 2e^{3x}$$

$$5.10) \quad y'' + 4y' = -3 \cos(3x) + \sin(2x)$$

$$5.11) \quad y'' - 2y' + y = 3x + 25 \sin(3x)$$

$$5.12) \quad y'' - 3y' + 2y = 60e^{2x} \cos(3x)$$

$$5.13) \quad y''' + y'' = 1 + \sin(x)$$

VI. Encuentre la solución del problema de valores iniciales:

$$6.1) \quad y'' - 4y = -7e^{2x} + x; \quad y(0) = 1, y'(0) = 3$$

$$6.2) \quad y'' + 10y' + 24y = 1; \quad y(2) = -3, y'(2) = 5$$

$$6.3) \quad y'' + 8y' + 12y = e^{-x} + 7; \quad y(0) = 1, y'(0) = 0$$

$$6.4) \quad y'' - 2y' - 8y = 10e^{-x} + 8e^{2x}; \quad y(0) = 1, y'(0) = 4$$

VII. La **ecuación de Euler** de segundo orden tiene la forma:

$$a_0 x^2 y'' + a_1 x y' + a_2 y = 0, \quad x > 0,$$

donde a_0, a_1, a_2 son constantes reales, $a_0 \neq 0$.

Método 1: Si hacemos la sustitución $x = e^t$ se obtiene la siguiente ecuación lineal homogénea con coeficientes constante:

$$a_0 \frac{d^2 y}{dt^2} + (a_1 - a_0) \frac{dy}{dt} + a_2 y = 0.$$

Método 2: Buscar una solución particular de la forma $y(x) = x^k$.

Encuentre la solución general de la ecuación de Euler, suponiendo $x > 0$:

$$7.1) \quad x^2 y'' + 2xy' - 6y = 0$$

$$7.2) \quad x^2 y'' - 6xy' + 12y = 0$$

$$7.3) \quad x^2 y'' + 3xy' + y = 0$$

$$7.4) \quad x^2 y'' - 3xy' + 4y = 0$$