Universidad de Santiago de Chile
Facultad de Ciencia, Departamento Matemática y C.C.
Ecuaciones Diferenciales y Métodos Numéricos
Primer Semestre 2019

Prueba Acumulativa (PA) Pauta

NOMBRE: .... R.U.T. ....

PROFESOR(A): .... COORDINACIÓN: ....

1. **(1.6 ptos)** Dado el siguiente P.V.I.

$$ty''(t) - y'(t) = 2t^2, \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0. \tag{1}$$

   (a) Demuestre que usando transformada de Laplace[1], la ecuación diferencial de coeficientes variables (1) se convierte en la siguiente ecuación diferencial lineal de primer orden.

$$Y'(s) + \frac{3}{s}Y(s) = -\frac{4}{s^5}. \tag{2}$$

   (b) Resuelva la ecuación diferencial lineal obtenida (2) y luego calcule $y(t)$.

Solución: (a) **(0.4 ptos)** Aplicando la TL, donde $\mathcal{L}(yt)(s) = Y(s)$

$$-\frac{d}{ds}[s^2Y(s)] - sY(s) = \frac{4}{s^3}.$$

derivando se obtiene ($s > 0$)

$$Y'(s) + \frac{3}{s}Y(s) = -\frac{4}{s^5}.$$

(b) **(0.8 ptos)** Factor integrante para la ecuación lineal $u(s) = s^3$, resolviendo se obtiene

$$Y(s) = \frac{4}{s^4} + C\frac{1}{s^3}.$$

(0.4 ptos) Aplicando la T.L. Inversa

$$y(t) = \frac{2}{3}t^3 + \frac{C}{2}t^2.$$

2. **(2.4 ptos)** Considere el problema de valores de frontera (PVF):

$$y'' + y = 20\cos(3t); \qquad y(0) = y(1) = 0.$$

   (a) Aproxime $y(t_i)$, con $h = 1/4$, usando diferencias finitas [2].

   (b) Aproxime $y(t)$, $0 \le t \le 1$, mediante el método de Rayleigh - Ritz[3], usando como función de prueba $u(t) = c_1\Phi_1 + c_2\Phi_2$, con $\Phi_1 = t(1-t)$ y $\Phi_2 = t^2(1-t)$.

   (c) Calcule la solución exacta del problema e indique qué método le proporcionó una mejor aproximación de $y(t)$, en $t = 0.5$. Justifique con el error.

---

[1] $\mathcal{L}(tf(t))(s) = -\frac{d}{ds}F(s), \quad \mathcal{L}(t^n)(s) = n!/s^{n+1}.$

[2] DF: $y'(t_i) \approx \frac{1}{2h}[y(t_{i+1}) - y(t_{i-1})]$; $y''(t_i) \approx \frac{1}{h^2}[y(t_{i+1}) - 2y(t_i) + y(t_{i-1})]$

[3] $RR: \sum_{i=1}^{n}\left[\int_0^1 \{p(t)\Phi_i'(t)\Phi_j'(t) + q(t)\Phi_i(t)\Phi_j(t)\}dt\right] c_i = \int_0^1 f(t)\Phi_j(t)dt, \; j = 1, 2, 3, \ldots, n.,$

Solución: (a) (**0.8 ptos**) Aplicando DF con $h = 1/4$, se llega

$$y_{i-1} + (h^2 - 2)y_i + y_{i+1} = 20\cos(3t_i),$$

escrito en forma matricial

$$\begin{pmatrix} -31/16 & 1 & 0 \\ 1 & -31/16 & 1 \\ 0 & 1 & -31/16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \frac{5}{4} \begin{pmatrix} \cos(3/4) \\ \cos(3/2) \\ \cos(9/4) \end{pmatrix}$$

Cuya solución es

$$\begin{pmatrix} y(1/4) \\ y(1/2) \\ y(3/4) \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.560548 \\ -0.171451 \\ 0.316781 \end{pmatrix}.$$

(b) **(0.8 pto.)** Considerando que $p(t) = -1$, $q(t) = 1$ y $f(t) = 20\cos(3t)$, el sistema a resolver es:

$$\begin{pmatrix} 7/10 & -3/20 \\ -3/20 & 1/7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \frac{20}{27} \begin{pmatrix} 2\sin(3) - 3\cos(3) - 3 \\ 4\sin(3) - \cos(3) - 2 \end{pmatrix}$$

Luego

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4.960351178 \\ 8.675169023 \end{pmatrix}$$

La solución queda $y_R(t) = c_1 t(1-t) + c_2 t^2(1-t)$ y evaluando se obtiene $y_R(0.5) = -0.155691666$

(c) (**0.6 ptos**) Solución exacta:

$$y(t) = C_1\cos(t) + C_2\sin(t) - \frac{5}{2}\cos(3t).$$

Sustituyendo condiciones de frontera, $C_1 = 5/2$ y $C_2 = \frac{5}{2}(\cos(3) - \cos(1))\frac{1}{\sin(1)} \approx -4.546487$. Luego

$$y(0.5) = -0.162594.$$

(**0.2 ptos**) Calcular los errores $E_{DF} =$ y $E_{RR} =$.

3. (**2 ptos**) Dado el siguiente de ecuaciones diferenciales lineales,

$$\mathbf{X}'(t) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{X}(t) + \begin{pmatrix} 1/t \\ 1/t \end{pmatrix} \qquad t \in \mathbb{R} - \{0\}. \tag{3}$$

   (a) Determine la solución homogénea $\mathbf{X}_H(t)$ del sistema homogéneo asociado a (3), use el método de valores y vectores propios para su resolución.

   (b) Determine la solución particular $\mathbf{X}_P(t)$ del sistema lineal no homogéneo (3).

   (c) Resuelva el sistema (3) con condición inicial $\mathbf{X}(1) = (2, -1)^t$.

Solución: (a) (**1 ptos**) Calculando los valores propios se obtiene $\lambda_1 = 0$ con multiplicidad 2. El primer vector asociado es $K = (1,1)^t$, luego $\mathbf{X}_1(t) = Ke^{\lambda_1 t} = K$. La segunda solución se determina de la forma $\mathbf{X}_1(t) = Kte^{\lambda_1 t} + Pe^{\lambda_1 t} = Kt + P$. Para encontrar P se reduce a calcular $(A - \lambda_1 I)P = K$, se obtiene $P = (1, 1/2)^t$. La solución del sistema homogéneo es:

$$\mathbf{X}_H = \begin{pmatrix} 1 & 1+t \\ 1 & 1/2+t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \Phi(t)C$$

(b) (**0.8 ptos)** Para el sistema No homogéneo se usa el Método de variación de parḿetro: Se propone $\mathbf{X}_p(t) = \Phi(t)U(t)$, luego

$$\mathbf{X}_p(t) = \Phi(t)\int \Phi^{-1}(t)F(t)dt = \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix}$$

Solución general:

$$\mathbf{X}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1+t \\ 1 & 1/2+t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix}$$

(**0.2 ptos)** (c) Sustituyendo las condiciones en $t = 1$ se obtiene $C_1 = -11$ y $C_2 = 6$.

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} -5+7t \\ -8+7t \end{pmatrix}$$