Universidad de Santiago de Chile
Facultad de Ciencia, Departamento Matemática y C.C.
Ecuaciones Diferenciales y Métodos Numéricos
Segundo Semestre 2019

PEP No.1 (Pauta)

NOMBRE: .... R.U.T. ....

PROFESOR(A): .... COORDINACIÓN: ....

1. Considere el problema de valor inicial (PVI):

$$\frac{dy}{dx} = 2 + \sqrt{y - 2x + 3}, \quad y(0) = 1.$$

   (a) (0.8 pto.) Mediante un cambio de variable apropiado, resuelva el PVI.

   (b) (1 pto.) Usando el método de Runge-Kutta de orden 4[1] y tomando $h = 0.1$, obtenga una aproximación de la solución para $y(0.2)$.

   (c) (0.2 ptos.) Indique el error de la aproximación anterior al comparar con la solución exacta.

Solución: (a) Se propone el cambio $z(x) = y - 2x + 3$ que transforma la ecuación a una de variables separable:

$$z'(x) = y'(x) - 2 \quad \Rightarrow \quad z'(x) = \sqrt{z}.$$

Cuya solución es

$$2\sqrt{y - 2x + 3} = (x + c) \quad \Rightarrow \quad y(x) = \frac{(x + c)^2}{4} + 2x - 3.$$

Sustituyendo la condición inicial $y(0) = 1$ se obtiene $c = 4$, luego la solución del PVI es

$$y(x) = \frac{x^2}{4} + 4x + 1. \quad (0.8 ptos.)$$

(b) Implementando RK44 con $f(x, y) = 2 + \sqrt{y - 2x + 3}$, $(x_0, y_0) = (0, 1)$ y $h = 0.1$ se tiene para la primera iteración:

$$\begin{aligned}
y_1 &= y_0 + \frac{1}{6}[K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4],\\
K_1 &= hf(x_0, y_0) = 0.400000\\
K_2 &= hf(x_0 + h/2, y_0 + K_1/2) = 0.402484\\
K_3 &= hf(x_0 + h/2, y_0 + K_2/2) = 0.402515\\
K_4 &= hf(x_1, y_0 + K_3) = 0.405000\\
y_1 &= 1.402499 \qquad \text{(0.5ptos.)}
\end{aligned}$$

[1] RK44: $y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}[K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4],\ i = 0, 1, 2, \dots$, donde

$K_1 = hf(x_i, y_i), K_2 = hf(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{1}{2}K_1),\ K_3 = hf(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{1}{2}K_2),\ K_4 = hf(x_{i+1}, y_i + K_3)$

Para la segunda iteración:

$$\begin{aligned}
&y_2 = y_1 + \frac{1}{6}[K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4],\\
&K_1 = hf(x_1, y_1) = 0.404999\\
&K_2 = hf(x_1 + h/2, y_1 + K_1/2) = 0.407484\\
&K_3 = hf(x_1 + h/2, y_1 + K_2/2) = 0.407514\\
&K_4 = hf(x_2, y_1 + K_3) = 0.410000\\
&y_2 = 1.809999. \qquad (0.5\text{ptos.})
\end{aligned}$$

(c) La solución exacta es $y(0.2) = 1.81.$ El error de la aproximación es

$$|y(1.2) - y_2| = 1 \times 10^{-6}. \qquad (0.2\text{ptos.})$$

El error puede variar en dependencia de cuantos dígitos usaron en el cálculo.

2. Considere la siguiente ecuación diferencial

$$x(x-1)y'' - (2x-1)y' + 2y = 6x^2(x-1)^2, \quad x > 1.$$

  (a) (0.8 ptos.) Determine una relación entre las constantes A, B y C de modo que la solución de la ecuación diferencial homogénea tenga la forma $y_h(x) = Ax^2 + Bx + C$. Explicite el conjunto fundamental de solución.

  (b) (1 pto.) Determine la solución general del problema.

Solución: (a) Sustituyendo en la ecuación homogénea se obtiene la relación $B = -2C$ y $A \in \mathbb{R}$, luego la solución homogénea tiene la forma:

$$y_h(x) = Ax^2 + C(1-2x), (0.6 ptos.)$$

donde $A, C \in \mathbb{R}$ El conjunto fundamental de soluciones es $\{x^2, (1-2x)\}$ (o $\{x^2, (2x-1)\}$). Calculando el Wronskiano podemos verificar que son l.i., en efecto

$$W[x^2, (1-2x)] = 2x(x-1) > 0, \quad \forall x > 1 \quad (0.2 ptos.)$$

.

(b) Para resolver la EDO no homogénea reescribimos la ecuación:

$$y'' - \frac{(2x-1)}{x(x-1)}y' + \frac{2}{x(x-1)}y = 6x(x-1), \quad x > 1.$$

Se propone la solución particular, usando variación de parámetros,

$$y_p(x) = u_1(x)x^2 + u_2(x)(1-2x),$$

donde $u_1(x)$ y $u_2(x)$ verifican

$$\begin{aligned}
x^2u_1'(x) + (1-2x)u_2'(x) &= 0\\
2xu_1'(x) - 2u_2'(x) &= 6x(x-1).
\end{aligned}$$

Resolviendo

$$u_1(x) = \int (6x-3)dx = 3(x^2-x) \qquad u_2(x) = \int 3x^2 dx = x^3.$$

Luego la solución general es

$$y(x) = C_1x^2 + C_2(1-2x) + x^4 - 2x^3. \quad (1pto.)$$

3. Un cuerpo de 0.1kg se sujeta a un resorte suspendido del techo y lo estira 0.2m hasta llegar a la posición de equilibrio. A continuación el cuerpo se reemplaza por uno de 0.2kg. En el instante $t = 0$, el cuerpo se desplaza 1m hacia abajo, y se suelta al mismo tiempo que empieza a actuar una fuerza externa $f(t) = 8\sin(5t)$N sobre el sistema. Si el medio no ofrece resistencia, la ecuación que modela el sistema es:

$$x''(t) + 5kx(t) = 40\sin(5t) \qquad x(0) = 1,\ x'(0) = 0.$$

donde $x(t)$ denota la posición del cuerpo en el instante t y k es la constante del resorte.

(a) (1 pto.) Determine la posición del cuerpo $x(t)$.

(b) (0.8 ptos.) Estime, usando Newton Raphson[2], el tiempo que transcurre desde que se suelta la masa hasta que pasa la posición de equilibrio por primera vez.

(c) (0.4 ptos.) Realice un bosquejo de la gráfica de $x(t)$ y una interpretación física de los resultados.

Considere $g = 10m/seg^2$.

Solución:
(a) Primero calculamos la constante del resorte k a partir de la información inicial, $k = 5(0.1pto.)$, luego la solución de la EDO homogénea es: $x(t) = C_1\cos(5t) + C_2\sin(5t)(0.2 \text{ ptos})$. Después calcular la solución particular por cualquiera de los métodos dados en clase se obtiene:

$$x_p(x) = -4t\cos(5t).$$

Solución general:

$$x_g(t) = C_1\cos(5t) + C_2\sin(5t) - 4t\cos(5t). \quad (0.6\text{ptos}).$$

Sustitiyendo las condiciones iniciales se obtiene $C_1 = 1$ y $C_2 = 4$, luego la solución del PVI es:

$$x(t) = \cos(5t) + \frac{4}{5}\sin(5t) - 4t\cos(5t). \quad (0.1\text{ptos})$$

(b) Para encontrar un cero de la función $f(t) = \cos(5t) + \frac{4}{5}\sin(5t) - 4t\cos(5t)$, aplicaremos Newton-Raphson con un t_0 adecuado, por ejemplo $t_0 = 0.5$ y obtienemos las siguientes iteraciones:

$$\begin{aligned} t_1 &= 0.07227037 \\ t_2 &= 0.82650600 \\ t_3 &= 0.88811589 \\ t_4 &= 0.88117280. \end{aligned}$$

[2] N-R: $t_{i+1} = t_i - \dfrac{f(t_i)}{f'(t_i)}$, para $i = 0, 1, 2, \ldots$

Con 4 iteraciones se obtiene el valor aproximado de **0.881173** que es el tiempo transcurrido desde que se suelta hasta que pasa por primera vez por la posición de equilibrio (**0.8 ptos.**). Es importante la elección del $\boldsymbol{t_0}$, si lo toman mayor a 1.4, el método converge al segundo cero 1.5400.

(c) Hacer el bosquejo del gráfico donde la amplitud del resorte va creciendo de forma oscilatoria con el tiempo. Está presente el fenómeno de resonancia que es cuando la frecuencia propia del resorte se iguala a la frecuencia de la fuerza externa, el resorte se puede romper. **(0.4 ptos.)**