Universidad de Santiago de Chile
Facultad de Ciencia, Departamento Matemática y C.C.
Ecuaciones Diferenciales y Métodos Numéricos
Primer Semestre 2019

Pauta PEP No.1

1. Considere el problema de valores iniciales (PVI):

$$x^2 dy + y^2 dx = xy\,dx, \quad x \in [1,3], \quad y(1) = 1. \tag{1}$$

   (a) (1 pto.) Mediante el cambio de variable $z = \dfrac{y}{x}$, resuelva el PVI.

   (b) (1 pto.) Usando el método de Runge-Kutta de orden 4 y tomando $h = 0.1$, obtenga una aproximación de la solución para $y(1.2)$.

   (c) (0.2 ptos.) Indique el error de la aproximación anterior al comparar con la solución exacta.

Solución

(a) Con el cambio de variable $z = y/x$ (o $y = zx$), se tiene que $y' = z + xz'$ **(0.2ptos.)**. Reemplazando en (1) se obtiene una EDO de variables separables

$$z'(x) = -\frac{z^2}{x}.$$

La solución constante es $z = 0$ ($y = 0$). Cuando $z \neq 0$ podemos separar variables:

$$\frac{1}{z^2}dz = -\frac{1}{x}dx.$$

Integrando se obtiene

$$\frac{1}{z} = \ln|x| + C.$$

Luego

$$z(x) = \frac{1}{\ln|x| + C}.$$

Volviendo a la variable original, se tiene que la solución general es

$$y(x) = \frac{x}{\ln|x| + C}. \quad (\mathbf{0.7ptos}).$$

Como $y(1) = 1$ tenemos que $C = 1$ y la solución del PVI es

$$y(x) = \frac{x}{\ln(x) + 1} \qquad x \in [1,3]. \quad (\mathbf{0.1ptos})$$

(b) Implementando RK44 con $f(x,y) = \frac{xy - y^2}{x^2}$, $(x_0, y_0) = (1,1)$ y $h = 0.1$ se tiene para la primera iteración:

$$
\begin{aligned}
y_1 &= y_0 + \frac{1}{6}[K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4],\\
K_1 &= 0.1 f(x_0, y_0) = 0\\
K_2 &= 0.1 f(x_0 + h/2, y_0) = 4.535147392290 \times 10^{-3}\\
K_3 &= 0.1 f(x_0 + h/2, y_0 + K_2/2) = 4.339289169904 \times 10^{-3}\\
K_4 &= 0.1 f(x_1, y_0 + K_3) = 7.940149612941 \times 10^{-3}\\
y_1 &= 1.004281503789555. \qquad (\mathbf{0.5ptos}.)
\end{aligned}
$$

Para la segunda iteración:

$$
\begin{aligned}
y_2 &= y_1 + \frac{1}{6}[K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4],\\
K_1 &= 0.1f(x_1, y_1) = 7.944488868984 \times 10^{-3}\\
K_2 &= 0.1f(x_1 + h/2, y_1 + K_1/2) = 0.010806517175789\\
K_3 &= 0.1f(x_1 + h/2, y_1 + K_2/2) = 0.010712601690500\\
K_4 &= 0.1f(x_2, y_1 + K_3) = 0.013040270306723\\
y_2 &= 1.014952003274269. \qquad (\mathbf{0.5ptos.})
\end{aligned}
$$

(c) La solución exacta es $y(1.2) = 1.014952314033742$. El error de la aproximación es

$$|y(1.2) - y_2| = 3.107e - 07. \qquad (\mathbf{0.2ptos.})$$

El error puede variar en dependencia de cuantos dígitos usaron en el cálculo.

2. Un cuerpo de masa $1gr$ se une a un resorte cuya constante es de $4gr/s^2$. Suponga que el medio no ofrece resistencia y que se aplica una fuerza externa al sistema igual a $F(t) = 3\cos(2t)$. Defina $x(t)$ como la posición de la masa en tiempo t, entonces x verifica la ecuación:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 4x(t) = F(t)$$

   (a) (1 pto) Suponga que tanto el estiramiento inicial, como la velocidad inicial, del resorte son iguales a cero; determine la posición del resorte en todo instante de tiempo.
   (b) (0.6 ptos.) Estime, usando Newton Raphson, el tiempo que transcurre desde que se suelta la masa hasta que pasa la posición de equilibrio por primera vez.
   (c) (0.2 ptos.) Realice un bosquejo de la grafica de x. A continuación, de una interpretación física del significado de la grafica de x.

Solución:
(a) Primero calculamos la solución de la EDO homogénea: $x(t) = C_1\cos(2t) + C_2\sin(2t)$**(0.2 ptos)**. Después calcular la solución particular por cualquiera de los métodos dados en clase se obtiene:

$$x_p(x) = \frac{3}{4}t\sin(2t).$$

Solución general:

$$x_g(t) = C_1\cos(2t) + C_2\sin(2t) + \frac{3}{4}t\sin(2t). \quad (\mathbf{0.7ptos}).$$

Sustitiyendo las condiciones iniciales se obtiene $C_1 = C_2 = 0$, luego la solución del PVI es:

$$x(t) = \frac{3}{4}t\sin(2t). \quad (\mathbf{0.1ptos})$$

(b) Aplicar Newton-Raphson con un x_0 adecuado, por ejemplo $x_0 = 1.5$ se obtienen las siguientes iteraciones:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= 1.574828800\\
x_2 &= 1.570806539\\
x_3 &= 1.570796327\\
x_4 &= 1.570796327.
\end{aligned}
$$

Con 4 iteraciones se obtiene el valor aproximado de $\pi/2$ que es el tiempo transcurrido desde que se suelta hasta que pasa por primera vez por la posición de equilibrio (**0.6 ptos.**). Es importante la elección del x_0, si lo toman cercano al cero, el método converge al 0, que es la condición inicial, pero no es el punto que se pide.

(c) Hacer el bosquejo del gráfico donde la amplitud del resorte va creciendo de forma oscilatoria con el tiempo. Está presente el fenómeno de resonancia que es cuando la frecuencia propia del resorte se iguala a la frecuencia de la fuerza externa, el resorte se puede romper. **(0.2 ptos.)**

3. Considere la ecuación diferencial: $y''(x) - Py'(x) = f(x)$, $P \in \mathbb{R}$.

   (a) (0.4 ptos.) Demuestre que si $P \neq 0$, entonces $\{1, e^{Px}\}$ es un conjunto fundamental de solución de la ecuación homogénea asociada.

   (b) (0.8 ptos.) Use el método de variación de parámetros para demostrar que la solución particular es:
$$y_p(x) = \frac{e^{Px}}{P} \int f(x)e^{-Px}dx - \frac{1}{P} \int f(x)dx. \tag{2}$$

   (c) (0.8 ptos.) Use (a) y (b), para resolver la ecuación: $y'' - 4y' = 6e^{3x}$.

Solución:

(a) Primero verificar que son solución de la EDO homogénea **(0.2 ptos.)**, después analizar el Wronskiano: si $P \neq 0$, se tiene
$$W(1, e^{Px}) = Pe^{Px} \neq 0, \, \forall x \in \mathbb{R}.$$
Luego son l.i. y se puede concluir que forman un conjunto fundamental de solución. **(0.2 ptos.)**

(b) El método de variación de parámetros propone buscar la solución particular como
$$y_p = C_1(x) + C_2(x)e^{Px}, \tag{3}$$
donde $C_1(x)$ y $C_2(x)$ verifican el sistema:
$$\begin{aligned} C_1'(x) + C_2'(x)e^{Px} &= 0 \\ C_1'(x) \cdot 0 + C_2'(x)Pe^{Px} &= f(x). \end{aligned}$$
Resolviendo
$$C_1(x) = -\frac{1}{P} \int f(x)dx, \qquad C_2(x) = \frac{1}{P} \int f(x)e^{-Px}dx.$$
Sustituyendo (3) se obtiene el resultado buscado. **(0.8 ptos.)**

(c) Primero calculemos la solución de la EDO homogénea con coeficientes constantes: $y_h = C_1 + C_2e^{4x}$. **(0.2 ptos.)** Para usar el resultado de (a) y (b), notar que $P = 4$ y $f(x) = 6e^{3x}$, luego evaluando en (2) para obtener la solución particular
$$\begin{aligned} y_p(x) &= \frac{e^{4x}}{4} \int 6e^{3x}e^{-4x}dx - \frac{1}{4} \int 6e^{3x}dx \\ &= \frac{3}{2} \left(e^{4x} \int e{-x}dx - \int e^{3x}dx \right) \\ &= -2e^{3x}. \end{aligned}$$
Solución general $y(x) = C_1 + C_2e^{4x} - 2e^{3x}$ **(0.6 ptos.)**.