PEP No.2

NOMBRE: .... R.U.T. ....

PROFESOR(A): .... COORDINACIÓN: ....

1. **(2 pto)**

   (a) Aplicando transformada de Laplace demuestre la igualdad

$$t * \sin(at) = \frac{1}{a}(t - 1 * \cos(at)).$$

   (b) Usando transformada de Laplace y (a), resuelva el problema de valores iniciales

$$y''(t) + 4y(t) = f(t), \qquad y(0) = 1,\ y'(0) = 0,$$

   donde

$$f(t) = \begin{cases} 3 & 0 \leq t < 1 \\ t & t \geq 1. \end{cases}$$

Solución: (a) **(0.6 ptos)** Tenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left(\frac{1}{a}(t - 1 * \cos(at))\right)(s) &= \frac{1}{a}\left[\frac{1}{s^2} - \frac{1}{s}\frac{s}{s^2+a^2}\right] \\ &= \frac{1}{a}\left[\frac{s^2+a^2-s^2}{s^2(s^2+a^2)}\right] = \frac{1}{s^2}\frac{a}{s^2+a^2} \\ &= \mathcal{L}(t * \sin(at))(s). \end{aligned}$$

(b) Como $f(t) = 3 + (t-3)\mathcal{U}(t-1)$ tenemos

$$\mathcal{L}(f(t)(s) = \frac{3}{s} + e^{-s}\mathcal{L}(t+1-3)(s) = \frac{3}{s} + e^{-s}\left[\frac{1}{s^2} - \frac{2}{s}\right].$$

Aplicando la transformada de Laplace a la ecuación y poniendo $Y(s) = \mathcal{L}(y(t)(s)$, se obtiene

$$(s^2+4)Y(s) = s + \frac{3}{s} + e^{-s}\left[\frac{1}{s^2} - \frac{2}{s}\right].$$

Despejando

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{s}{s^2+4} + \frac{3}{s}\frac{1}{s^2+4} + e^{-s}\left[\frac{1}{s^2} - \frac{2}{s}\right]\frac{1}{s^2+4}\ \textbf{(0.6ptos)} \\ &= \mathcal{L}(\cos(2t))(s) + \frac{3}{2}\mathcal{L}(1 * \sin(2t))(s) + \frac{1}{2}e^{-s}\mathcal{L}((t-2) * \sin(2t))(s) \end{aligned}$$

Notar que

$$\begin{aligned}
1 * \sin(2t) &= \int_0^t \sin(2u)du = \frac{1}{2}(1-\cos(2t)), \\
t * \sin(2t) &= \frac{1}{2}(t - 1 * \cos(2t) = \frac{1}{2}(t - \int_0^t \cos(2u)du) \\
&= \frac{1}{4}(2t - \sin(2t)).
\end{aligned}$$

Luego

$$(t-2) * \sin(2t) = \cos(2t) - 1 + \frac{1}{4}(2t - \sin(2t))$$

La solución es:

$$y(t) = \cos(2t) + \frac{3}{4}(1-\cos(2t)) + \frac{1}{2}[\cos(2(t-1)) - 1 + \frac{1}{4}(2(t-1) - \sin(2(t-1)))]\mathcal{U}(t-1).$$

(0.8 ptos)

2. **(2.4 ptos)** Dado el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\mathbf{X}'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \mathbf{X}(t) + \begin{pmatrix} 2 \\ e^{-3t} \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{X}(0) = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

   (a) Determine la solución del sistema de ecuaciones diferenciales con valores iniciales.
   (b) Usando el método de Runge-Kutta de orden dos, aproxime $\mathbf{X}(0.1)$.
   (c) Calcule el error de la aproximacón anterior al comparar con la solución exacta.

Solución: (a) Resolvamos primero el sistema homogéneo. Los autovalores son los λ que verifican

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 2 \\ -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-2)(\lambda-1) = 0.$$

Luego los autovalores son $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = 2$. El vector propio $\mathbf{v}_i$ asociado a λ_i se obtiene resolviendo

$$\begin{pmatrix} -\lambda_i & 2 \\ -1 & 3-\lambda_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Se escoge $\mathbf{v}_1 = (2,1)^t$ como el vector propio asociado a λ_1 y $\mathbf{v}_2 = (1,1)^t$ el asociado a λ_2. De esta forma la solución del sistema homogéneo es:

$$\mathbf{X}_h(t) = C_1 e^t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.(\mathbf{0.6ptos})$$

Para encontrar una solución particular del sistema no homogéneo, usando coeficiente indeterminado, se propone

$$\mathbf{X}_p(t) = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix} e^{-3t}.$$

Sustituyendo en el sistema se obtiene

$$A = -3, \quad B = -1, \quad C = 1/10, \quad D = -3/20.$$

Por lo tanto, la solución particular es

$$\mathbf{X}_p(t) = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/10 \\ -3/20 \end{pmatrix} e^{-3t}.(\mathbf{0.6ptos.})$$

Luego la solución general de nuestro sistema es

$$\mathbf{X}(t) = C_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{t} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} + \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/10 \\ -3/20 \end{pmatrix} e^{-3t}.$$

Sustituyendo las condiciones iniciales se obtiene $C_1 = -9/4$ y $C_2 = 27/5$. La solución al PVI es:

$$\mathbf{X}(t) = -\frac{9}{4} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{t} + \frac{27}{5} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} + \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/10 \\ -3/20 \end{pmatrix} e^{-3t}.(\mathbf{0.2ptos.})$$

Observación: La solución particular se puede obtener también usando el método de variación de parámetro.

(b) Aplicar el método de Runge-Kutta de orden 2 con $h = 0.1$. Notar que

$$\mathbf{F}(t, \mathbf{X}) = \begin{pmatrix} 2x_2 + 2 \\ -x_1 + 3x_2 + e^{-3t} \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{X}_0 = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Primera iteración, $\mathbf{X}_1 = \mathbf{X}_0 + \frac{1}{2}(K_1 + K_2)$, donde

$$K_1 = 0.1\,\mathbf{F}(0, \mathbf{X}_0) = \begin{pmatrix} 0.6 \\ 0.9 \end{pmatrix}, \qquad K_2 = 0.1\,\mathbf{F}(0.1, \mathbf{X}_0 + K_1) = \begin{pmatrix} 0.78 \\ 1.084081 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, la solución aproximada del sistema en $t = 0.1$ es:

$$\mathbf{X}_1 = \mathbf{X}_0 + \frac{1}{2}(K_1 + K_2) = \begin{pmatrix} -1.31 \\ 2.992040 \end{pmatrix}.(\mathbf{0.8ptos.})$$

(c) La solución exacta del sistema en $t = 0.1$ se obtuvo de (a)

$$\mathbf{X}(0.1) = \begin{pmatrix} -1.303612 \\ 2.997817 \end{pmatrix}.$$

El error absoluto es:

$$|\mathbf{X}(0.1) - \mathbf{X}_1| = \begin{pmatrix} 6.38 \\ 5.77 \end{pmatrix} \times 10^{-3}.(\mathbf{0.2ptos.})$$

3. **(1.6 ptos.)** Considere el sistema de estanque cerrado como se muestra en la figura. Inicialmente el estanque A contiene 100 lb de sal disueltas y el B 50 lb.

   (a) Use la información de la figura para formar un modelo matemático de la cantidad de sal $x_1(t)$ y $x_2(t)$ en cada instante de tiempo en los estanques A y B, respectivamente. Encuentre la solución del sistema usando el método de valores y vectores propios.

   (b) Encuentre una relación entre $x_1(t)$ y $x_2(t)$ en cada instante de tiempo. Use esta relación para determinar la cantidad de sal en cada estanque cuando $t = 30$min.

Solución: (a) El sistema es el siguiente:

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} -0.02 & 0.03 \\ 0.02 & -0.03 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \\ 50 \end{pmatrix}.(\mathbf{0.4ptos}.)$$

Los autovalores son los λ que verifican

$$\begin{vmatrix} -0.02-\lambda & 0.03 \\ 0.02 & -0.03-\lambda \end{vmatrix} = \lambda(\lambda+0.05) = 0.$$

Luego los autovalores son $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_2 = -0.05$. El vector propio $\mathbf{v}_i$ asociado a λ_i se obtiene resolviendo

$$\begin{pmatrix} -0.02-\lambda_i & 0.03 \\ 0.02 & -0.03-\lambda_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Se escoge $\mathbf{v}_1 = (3/2, 1)^t$ como el vector propio asociado a λ_1 y $\mathbf{v}_2 = (1, -1)^t$ el asociado a λ_2. De esta forma la solución del sistema homogéneo es:

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 3/2 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{-0.05t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.(\mathbf{0.6ptos})$$

Sustituyendo las condiciones iniciales se obtiene $C_1 = 60$ y $C_2 = 10$. La solución al PVI es

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 90 + 10e^{-0.05t} \\ 60 - 10e^{-0.05t} \end{pmatrix}.(\mathbf{0.2ptos})$$

(b) **(0.4 ptos.)** Relación entre las cantidades de sal de los estanques en todo momento es:

$$x_1(t) + x_2(t) = 150.$$

Luego para $t = 30$min basta calcular $x_1(30) = 90 + 10e^{-1.5} = 92.2313$ lb y usando la relación anterior se tiene $x_2(t) = 150 - 92.2313 = 57.7687$ lb.

Observación: Se pueden escoger otros valores de los vectores propios.