Capítulo 7

Transformada de Laplace

7.1 Definición y Propiedades

Sea $f : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ y suponga que

$$\int_0^\infty e^{-st} f(t)dt = \lim_{R \longrightarrow \infty} \int_0^R e^{-st} f(t)dt$$

converge para algunos valores de s. Para estos valores definimos una nueva función $\widehat{f}$, llamada **transformada de Laplace** de f, poniendo

$$\widehat{f}(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt$$

Notación. $\qquad \mathcal{L}(f(t))(s) = \widehat{f}(s) = \displaystyle\int_0^\infty e^{-st} f(t)dt$
si esta integral converge.

Teorema 7.1.1.

a) *$\mathcal{L}$ es lineal, es decir dadas $f, g : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ tales que $\widehat{f}(s)$ y $\widehat{g}(s)$ existen, $\forall a, b \in \mathbb{R}$ se tiene*

$$\mathcal{L}(af(t) + bg(t))(s) = a\mathcal{L}(f(t))(s) + b\mathcal{L}(g(t))(s)$$

b) *Si $f, g : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ son continuas y $\widehat{f}(s) = \widehat{g}(s)$, entonces $f = g$.*

c) *Si f' es continua en $[0, +\infty[$ y $\lim\limits_{t \longrightarrow +\infty} e^{-st} f(t) = 0$, entonces*

$$\mathcal{L}(f'(t))(s) \quad \textit{existe} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathcal{L}(f(t))(s) \quad \textit{existe}.$$

Además se tiene $\quad \mathcal{L}(f'(t))(s) = s\mathcal{L}(f(t))(s) - f(0).$

d) *Para* $f : [0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ *continua, definamos* $F(t) = \int_0^t f(u)du$*. Si para* $s > 0$ $\mathcal{L}(f(t))(s)$ *existe y* $\lim\limits_{t\longrightarrow +\infty} e^{-st}F(t) = 0$*, entonces se tiene que* $\mathcal{L}(F(t))(s)$ *existe y que*

$$\mathcal{L}(F(t)) = \frac{1}{s}\mathcal{L}(f(t))(s)$$

(es decir $\mathcal{L}\left(\int_0^t f(u)du\right)(s) = \frac{1}{s}\mathcal{L}(f(t))(s)$*.)*

Demostración.

a) Se deja al lector.

b) Pendiente (vea sección 7.8).

c) Sea s tal que $\lim\limits_{t\longrightarrow +\infty} e^{-st}f(t) = 0$, y $R > 0$. Entonces

$$\begin{aligned}\int_0^R e^{-st}f'(t)dt &= e^{-st}f(t)\Big/_0^R + s\int_0^R e^{-st}f(t)dt\\ &= e^{-sR}f(R) - f(0) + s\int_0^R e^{-st}f(t)dt\end{aligned}$$

Luego

$$\lim_{t\longrightarrow +\infty}\int_0^R e^{-st}f'(t)dt \quad \text{existe} \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{t\longrightarrow +\infty}\int_0^R e^{-st}f(t)dt \quad \text{existe}\,,$$

y en caso positivo

$$\mathcal{L}(f'(t))(s) = s\mathcal{L}(f(t))(s) - f(0)\,.$$

d) Tenemos que $F'(t) = f(t)$ es continua y $F(0) = 0$. Como $\mathcal{L}(F'(t))(s)$ existe y $\lim\limits_{t\longrightarrow +\infty} e^{-st}F(t) = 0$, entonces $\mathcal{L}(F(t))(s)$ existe y

$$\mathcal{L}(f(t))(s) = \mathcal{L}(F'(t))(s) = s\mathcal{L}(F(t))(s) - F(0) = s\mathcal{L}(F(t))(s)\,.$$

Por lo tanto

$$\mathcal{L}(f(t))(s) = \frac{1}{s}\mathcal{L}(F(t))(s)\,.$$

Ejemplo 7.1.2. $\mathcal{L}(1)(s) = \frac{1}{s} \qquad \forall s > 0.$

En efecto si $s > 0$

$$\int_0^R e^{-st}dt = \quad -\frac{1}{s}(e^{-sR} - 1)\,,$$

lo que implica

$$\mathcal{L}(1)(s) = \lim_{R \longrightarrow +\infty} \int_0^R e^{-st}dt = \frac{1}{s} \qquad \forall s > 0\,.$$

Observe que $\mathcal{L}(1)(s)$ no existe para $s \leq 0$. Así $\mathcal{L}(1)(s)$ sólo está definida para $s > 0$.

Ejemplo 7.1.3. $\mathcal{L}(t)(s) = \dfrac{1}{s^2} \quad \forall s > 0.$

Pongamos $f(t) = 1 \quad \forall t \geq 0$. Entonces $F(t) = \displaystyle\int_0^t f(u)du = t$ y para $s > 0$

$$\lim_{t \longrightarrow +\infty} e^{-st}F(t) = \lim_{t \longrightarrow +\infty} e^{-st}t = 0\,.$$

Luego

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(F(t))(s) &= \frac{1}{s}\mathcal{L}(f(t))(s) \qquad \forall s > 0 \\ \Longrightarrow \quad \mathcal{L}(t)(s) &= \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{s} = \frac{1}{s^2} \qquad \forall s > 0\,. \end{aligned}$$

Ejemplo 7.1.4. $\mathcal{L}(t^2)(s) = \dfrac{2}{s^3}, \quad \forall s > 0.$

Sea ahora $f(t) = 2t$ y pongamos $F(t) = \int_0^t f(u)du = t^2$. Entonces para $s > 0$ tenemos

$$\lim_{t \longrightarrow +\infty} e^{-st}t^2 = 0\,.$$

De esta forma

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(t^2)(s) &= \mathcal{L}(F(t))(s) = \frac{1}{s}\mathcal{L}(f(t))(s) = \frac{1}{s}\mathcal{L}(2t)(s) \\ &= \frac{2}{s}\mathcal{L}(t)(s) = \frac{2}{s^3} \qquad \forall s > 0\,. \end{aligned}$$

Ejercicio 7.1.5. $\mathcal{L}(t^n)(s) = \dfrac{n!}{s^{n+1}} \quad \forall s > 0$ *si* $n = 1, 2, \cdots.$

Ejemplo 7.1.6. $\mathcal{L}(e^t)(s) = \dfrac{1}{s-1} \quad \forall s > 1.$

Para $R > 0$

$$\int_0^R e^{-st}e^t dt = \int_0^R e^{(1-s)t} dt = \frac{1}{1-s} e^{(1-s)t} \Big/_0^R = \frac{1}{1-s}\left[e^{(1-s)R} - 1\right] .$$

$$\therefore \quad \lim_{R \longrightarrow +\infty} \int_0^R e^{-st}e^t dt \;=\; \frac{1}{s-1} + \frac{1}{1-s} \lim_{R \longrightarrow +\infty} e^{(1-s)R} \;=\; \frac{1}{s-1} \;+\; 0 \quad \forall s > 1\,.$$

$$\therefore \quad \mathcal{L}(e^t)(s) \;=\; \frac{1}{s-1} \qquad \forall s > 1\,.$$

Ejemplo 7.1.7. Considere el problema de valores iniciales

$$\begin{cases} y' - y & = 1 - t \\ y(0) & = 2 \end{cases}$$

Sea $y(t)$ la solución y asumamos que $\mathcal{L}(y(t))(s)$ existe y $\lim\limits_{t \longrightarrow +\infty} e^{-st}\, y(t) = 0$ para todo $s > s_0$, cierto s_0.
Entonces como $y'(t)$ es continua, $\mathcal{L}(y'(t))(s)$ existe $\forall s > s_0$. Luego para todo estos s se tiene

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(y'(t) \;&-\; y(t))(s) = \mathcal{L}(1-t)(s) \\
\mathcal{L}(y'(t))(s) \;&-\; \mathcal{L}(y(t))(s) = \mathcal{L}(1)(s) - \mathcal{L}(t)(s) \\
s\mathcal{L}(y(t))(s) \;&-\; y(0) - \mathcal{L}(y(t))(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(s-1)\mathcal{L}(y(t))(s) - 2 \;&=\; \frac{1}{s} - \frac{1}{s^2} \\
\mathcal{L}(y(t))(s) \;&=\; \frac{1}{s-1}\left[\frac{1}{s} - \frac{1}{s^2} + 2\right] = \frac{s-1+2s^2}{s^2(s-1)} \\
&=\; \frac{1}{s^2} + \frac{2}{s-1} = \mathcal{L}(t)(s) + \mathcal{L}(2e^t)(s) \\
\therefore \quad \mathcal{L}(y(t))(s) \;&=\; \mathcal{L}(t + 2e^t)(s) \qquad \forall s > s_0\,, \quad \text{y} \\
y(t) \;&=\; t + 2e^t\,.
\end{aligned}$$

Definición 7.1.8. *Sea $f : [0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ continua. Decimos que f es de* **orden exponencial** b *(orden exp. b) si existe $M > 0$ tal que $e^{-bt}|f(t)| \leq M \quad \forall t \geq 0$.*

Teorema 7.1.9. *Sea $f : [0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ continua y de orden exp. b. Entonces* *a)* $\mathcal{L}(f(t))(s)$ *existe* $\forall s > b$.

b) *Si además* $f' : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ *es continua, entonces* $\mathcal{L}(f'(t))(s)$ *existe* $\forall s > b$ *y*

$$\mathcal{L}(f'(t))(s) = s\mathcal{L}(f(t))(s) - f(0).$$

c) *Si* $b \neq 0$ *y* $F(t) = \int_0^t f(u)du$, *entonces* F *es de orden exp.* b *y*

$$\mathcal{L}(F(t))(s) = \frac{1}{s}\mathcal{L}(f(t))(s) \quad \forall s > b.$$

Demostración. Ejercicio.

Observaciones 7.1.10. Si $f, f', f'', \cdot$, etc. son continuas y de orden exp. b , se tiene para $s > b$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(f'(t))(s) &= s\mathcal{L}(f(t))(s) - f(0) \\
\mathcal{L}(f''(t))(s) &= s^2\mathcal{L}(f(t))(s) - sf(0) - f'(0) \\
\mathcal{L}(f'''(t))(s) &= s^3\mathcal{L}(f(t))(s) - s^2 f(0) - sf'(0) - f''(0) \\
&\vdots \\
&etc.
\end{aligned}$$

Ejercicio 7.1.11. $f(t)$ de orden exp. $b \Longrightarrow$ $e^{-at}f(t)$ es de orden exp. $b - a$ y para $s > b - a$ tenemos

$$\mathcal{L}(e^{-at}f(t))(s) = \mathcal{L}(f(t))(s + a).$$

Sabemos $e^{-bt}|f(t)| \leq M \quad \forall t \geq 0$.

$$\therefore \quad e^{-(b-a)t}|e^{-at}f(t)| = e^{-bt}|f(t)| \leq M \quad \forall t \geq 0$$

$\therefore$ $e^{-at}f(t)$ es de orden exp. $b - a$.
Además para $s > b - a$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(e^{-at}f(t))(s) &= \lim_{R \longrightarrow +\infty} \int_0^R e^{-st}e^{-at}f(t)dt \\
&= \lim_{R \longrightarrow +\infty} \int_0^R e^{-(s+a)t}f(t)dt \\
&= \mathcal{L}(f(t))(s + a)
\end{aligned}$$

Ejercicio 7.1.12. $\mathcal{L}(sen(bt))(s) = \dfrac{b}{s^2+b^2}$ *para* $s > 0$.

En efecto, para $R > 0$, tenemos

$$\int_0^R e^{-st}\mathrm{sen}(bt)dt = -\frac{1}{s}e^{-st}\mathrm{sen}(bt)\Big/_0^R + \frac{b}{s}\int_0^R e^{-st}\cos(bt)dt$$

$$= \quad -\frac{1}{s}\mathrm{sen}(bR) + \frac{b}{s^2}\left[-\frac{1}{s}e^{-sR}\cos(bR) - 1\right] - \frac{b^2}{s^2}\int_0^R e^{-st}\mathrm{sen}(bt)dt$$

$$\therefore \quad \left(1+\frac{b^2}{s^2}\right)\int_0^R e^{-st}\mathrm{sen}(bt)dt = -\frac{1}{s}e^{-sR}\mathrm{sen}(bR) - \frac{b}{s^2}e^{-sR}\cos(bR) + \frac{b}{s^2}$$

$$\therefore \quad \mathcal{L}(\mathrm{sen}(bt))(s) = \frac{s^2}{s^2+b^2}\cdot\frac{b}{s^2} \qquad \forall s > 0$$

$$\Longrightarrow \quad \mathcal{L}(\mathrm{sen}(bt))(s) = \frac{b}{s^2+b^2} \qquad \forall s > 0$$

Ejercicio 7.1.13. $\mathcal{L}(\cos(bt))(s) = \dfrac{s}{s^2+b^2}$ $\forall s > 0$.

Para $s > 0$ tenemos

$$\mathcal{L}(b\cos(bt))(s) = \mathcal{L}((\mathrm{sen}(bt))')(s) = s\mathcal{L}(\mathrm{sen}(bt))(s) - \mathrm{sen}(0) = s\frac{b}{s^2+b^2}\cdot$$

Luego

$$\mathcal{L}(\cos(bt))(s) = \frac{s}{s^2+b^2}\cdot$$

Ejercicio 7.1.14. $\mathcal{L}(e^{-at}\, sen(bt))(s) = \dfrac{b}{(s+a)^2+b^2}$ $\forall s > -a$.

Aplicación directa del ejercicio 7.1.11.

Ejercicio 7.1.15. $\mathcal{L}(te^t)(s) = \dfrac{1}{(s-1)^2}$ $\forall s > 1$.

Usando ejercicio 7.1.11, tenemos

$$\mathcal{L}(te^t)(s) = \mathcal{L}(t)(s-1) \quad \forall s > 1\,,$$

lo que implica

$$\Longrightarrow \quad \mathcal{L}(te^t)(s) = \frac{1}{(s-1)^2} \quad \forall s > 1\,.$$

Teorema 7.1.16. *Si f es de orden exp. b, entonces $\widehat{f}(s) = \mathcal{L}(f(t))(s)$ tiene derivada de todas las ordenes para $s > b$ y*

$$(\widehat{f})'(s) = \mathcal{L}(-tf(t))(s); \quad (\widehat{f})''(s) = \mathcal{L}(t^2f(t))(s); \quad (\widehat{f})'''(s) = \mathcal{L}(-t^3f(t))(s), \quad etc.$$

Demostración. $\dfrac{\partial}{\partial s}(e^{-ts}f(t)) = -te^{-ts}f(t) = e^{-ts}(-tf(t))$.

Además la integral $\displaystyle\int_0^\infty e^{-st}tf(t)dt$ converge uniformemente para $s \geq b_0$ donde $b_0 > b$ es cualquiera (es decir $\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists N > 0$ tal que $R > N \implies$ $|\displaystyle\int_0^R e^{-st}tf(t)dt - \int_0^\infty e^{-st}tf(t)dt| < \varepsilon \quad \forall s \geq b_0$).

Tenemos entonces

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial s}\widehat{f}(s) &= \frac{\partial}{\partial s}\int_0^\infty e^{-ts}f(t)dt = \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial s}(e^{-ts}f(t))dt \\ &= \int_0^\infty e^{-ts}(-t\,f(t)dt = \mathcal{L}(-tf(t))(s)\,.\end{aligned}$$

Ejemplo 7.1.17. Tenemos $\mathcal{L}(1)(s) = \dfrac{1}{s}$ para $s > 0$. Por lo tanto

$$\mathcal{L}(e^{at})(s) = \frac{1}{s-a} \quad \text{para} \quad s > a \quad \text{(ver ejercicio 7.1.11).}$$

Pero $\dfrac{\partial}{\partial s}\left(\dfrac{1}{s-a}\right) = \dfrac{-1}{(s-a)^2} = \mathcal{L}(-te^{at})(s)$ para $s > a$.

$$\therefore \mathcal{L}(te^{at})(s) = \frac{1}{(s-a)^2} \qquad \forall s > a\,.$$

Ejercicios:

1. $\mathcal{L}(t^{n-1}e^{at}) = \dfrac{(n-1)!}{(s-a)^n}$ para $s > a$ y en particular $\mathcal{L}(t^n)(s) = \dfrac{n!}{s^{n+1}}$ para $s > 0$.

2. Si f_1, f_2 son de orden exp b_1, b_2 respectivamente, entonces $f_1 + f_2$ es de orden exp $b = \max\{b_1, b_2\}$.

3. Si f_1, f_2 son de orden exp b_1, b_2 respectivamente, entonces $f_1 \cdot f_2$ es de orden exp $b = b_1 \cdot b_2$.

Lemma 7.1.18. *Sean $q(t), q'(t)$ continuas y de orden exp. b y sea $\phi(t))$ solución de $y' - ry = q(t)$. Entonces $\phi(t)$, $\phi'(t)$, $\phi''(t)$ son continuas y de orden exp. $b' = \max\{b, |r|\}$.*

Demostración. Sin pérdida de generalidad asumimos que $b > |r|$.

a) Si $r \in \mathbb{R}$ la solución es $\phi(t) = e^{rt}(c + \int_0^t e^{-ru}q(u)du)$. Luego basta demostrar que $U(t) = \int_0^t e^{-ru}q(u)du$, y sus derivadas $U'(t)$, $U''(t)$ son continuas y de orden exp. $b-r$.
Pero $q(t)$ de orden exp. b implica $e^{-bt}|q(t)| < M \quad \forall\, t \geq 0$.
Entonces $e^{-(b-r)u}|e^{-ru}q(u)| = e^{-bu}|q(u)| < M \qquad \forall u > 0$ y luego

$$\begin{aligned} e^{-(b-r)t}|\int_0^t e^{-ru}q(u)du| &\leq e^{-(b-r)t}|\int_0^t Me^{(b-r)u}du| \\ &= Me^{-(b-r)t}\frac{1}{b-r}(e^{(b-r)t}-1) \leq \frac{M}{b-r}\,. \end{aligned}$$

$\therefore \quad U(t)$ es de orden exponencial $\quad b-r$.

Además es claro que $\quad U'(t) = e^{-rt}q(t) \quad$ y $\quad U''(t) = -re^{-rt}q(t) + e^{-rt}q''(t)$ son de orden exp. $b-r$.

b) Si $r \in \mathbb{C}$, digamos $r = \alpha + \imath\beta$, la demostración es un poco más complicada y se omotirá en estas notas.

Teorema 7.1.19. *Si $q(t), q'(t)$ son continuas y de orden exp. b y $\phi(t)$ es solución de*

$$y'' + p_1y' + p_0y = q(t)\,, \tag{7.1}$$

donde p_1, p_2 son constantes, entonces: $\phi(t), \phi'(t), \phi''(t)$ son continuas y de algún orden exp.

Demostración. Sean r_1, r_2 raíces de $r^2 + p_1r + p_0 = 0$. Entonces

$$-(r_1 + r_2) = p_1 \quad \text{y} \quad r_1 \cdot r_2 = p_0\,.$$

Sea $\phi(t)$ solución de (7.1). Definamos $\quad \phi_1(t) = \phi'(t) - r_2\phi(t)$. Entonces

$$\begin{aligned} \phi_1'(t) - r_1\phi_1(t) &= \phi''(t) - r_2\phi'(t) - r_1(\phi'(t) - r_2\phi(t)) \\ &= \phi''(t) - (r_1 + r_2)\phi'(t) + r_1r_2\phi(t) = q(t)\,. \end{aligned}$$

Por lo tanto $\phi_1(t)$ es solución de $y' - r_1y = q(t)$, lo que implica $\phi_1(t), \phi_1'(t), \phi_1''(t)$ son continuas y de algún orden exp.

Pero como $\phi(t)$ es solución de $\; y' - r_2y = \phi_1(t)$, obtenemos también que $\phi(t)$, $\phi'(t)$ y $\phi''(t)$ son continuas y de algún orden exp.

Corolario 7.1.20. *Si $q(t), q'(t)$ son continuas y de orden exp. b y $\phi(t)$ es solución de (7.1), entonces $\mathcal{L}(\phi(t))(s), \mathcal{L}(\phi'(t))(s)$ y $\mathcal{L}(\phi''(t))(s)$ existen para todo s suficientemente grande.*

Teorema 7.1.21. *El operador $\mathcal{L}$ es $1-1$; es decir, si f y g son continuas en $[0,+\infty[$ y $\mathcal{L}(f)(s)=\mathcal{L}(g(t)(s)\quad \forall s\geq s_0$, entonces $f(t)=g(t)\quad \forall t\geq 0$.*

Demostración. La demostración está en la sección 7.8.

Usando este teorema podemos definir el operador inverso $\mathcal{L}^{-1}$ de la siguiente forma:

$$\mathcal{L}^{-1}(\phi(s))(t)=f(t)\Longleftrightarrow\mathcal{L}(f(t))(s)=\phi(s)\,.$$

Observaciones 7.1.22. $\mathcal{L}^{-1}$ es un operador lineal; es decir,

$$\mathcal{L}^{-1}(a\phi(s)+b\psi(s))(t)=a\mathcal{L}^{-1}(\phi(s))(t)+b\mathcal{L}^{-1}(\psi(s))(t)\,.$$

Ejemplo 7.1.23. Considere la ecuación

$$y''+4y=t+sen(2t)\,,\quad y(0)=y'(0)=0\,.$$

Aquí $q(t)=t+\operatorname{sen}(2t)$ y $q'(t)=1+2\cos(2t)$ son continuas y de orden exp. b cualquier $b>0$. Luego, la solución $y(t)$ y sus derivadas $y'(t)$ y $y''(t)$ son de orden exp. α para algún α suficientemente grande.

Luego para $s\geq\alpha$ tenemos

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(y''(t)+4y(t))(s) &= \mathcal{L}(t+\operatorname{sen}(2t))(s)\,,\\
s^2\mathcal{L}(y(t))(s)+4\mathcal{L}(y(t))(s) &= \frac{1}{s^2}+\frac{2}{s^2+4}\,,\\
(s^2+4)\mathcal{L}(y(t))(s) &= \frac{1}{s^2}+\frac{2}{s^2+4}\,,\\
\mathcal{L}(y(t))(s) &= \frac{1}{s^2(s^2+4)}+\frac{2}{(s^2+4)^2}\,.
\end{aligned}$$

De esta forma

$$y(t)=\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2(s^2+4)}\right)(t)+2\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2(s^2+4)^2}\right)(t)\,.$$

Pero

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2(s^2+4)}\right)(t) &= \frac{1}{4}\,\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2}-\frac{1}{s^2+4}\right)(t)\\
&= \frac{1}{4}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2}\right)(t)-\frac{1}{8}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2}{s^2+4}\right)(t)\\
&= \frac{1}{4}t-\frac{1}{8}\operatorname{sen}(2t)
\end{aligned}$$

Afirmación $\mathcal{L}(\mathrm{sen}\,(at) - at\,\cos\,(at)) = \dfrac{2a^3}{(s^2+a^2)^2}$.

En efecto :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(\mathrm{sen}\,(at))(s) &= \frac{a}{s^2+a^2}\\
\mathcal{L}(\cos\,(at))(s) &= \frac{s}{s^2+a^2}\\
\mathcal{L}(-at\cos(at))(s) &= a\mathcal{L}(-t\cos(at))(s) = a\left(\frac{s}{s^2+a^2}\right)' = a\cdot\frac{a^2-s^2}{(s^2+a^2)}\,.
\end{aligned}$$

Luego

$$\mathcal{L}(\mathrm{sen}(at) - at\cos(at))(s) = a\left[\frac{1}{s^2+a^2} + \frac{a^2-s^2}{(s^2+a^2)^2}\right] = \frac{2a^3}{(s^2+a^2)}\,\cdot$$

Por lo tanto

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s^2+4)^2}\right)(t) = \frac{1}{16}\left(\mathrm{sen}\,(2t) - 2t\,\cos\,(2t)\right).$$

De esta forma

$$\begin{aligned}
y(t) &= \frac{1}{4}t - \frac{1}{8}\,\mathrm{sen}\,(2t) + \frac{1}{8}\left(\,\mathrm{sen}\,(2t) - 2t\,\cos\,(2t)\right)\\
&= \frac{1}{4}t - \frac{1}{4}t\,\cos\,(2t)\,\cdot
\end{aligned}$$

Ejemplo 7.1.24. Resolvamos la ecuación

$$y'' + 2y' + 2y = 2e^{-t}\cos\,(t)\,, \quad y(0) = 2\,,\; y'(0) = -2\,.$$

Pongamos $Y(s) = \mathcal{L}(y(t))(s)$. Tenemos

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(y''(t))(s) &= s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) \;=\; s^2Y(s) - 2s + 2\,,\\
2\mathcal{L}(y'(t))(s) &= 2(sY(s) - y(0)) \;=\; 2sY(s) - 4\,,\\
2\mathcal{L}(y(t))(s) &= 2Y(s)\,,\\
2\mathcal{L}(e^{-t}\cos(t))(s) &= \frac{2(s+1)}{(s+1)^2+1}\,\cdot
\end{aligned}$$

Entonces, aplicando transformada de Laplace a nuestra ecuación y reemplazando se obtiene

$$(s^2+2s+2)Y(s) - 2s - 2 \;=\; \frac{2(s+1)}{(s+1)^2+1}\,\cdot$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
Y(s) &= \frac{2(s+1)}{(s+1)^2+1} + \frac{2(s+1)}{((s+1)^2+1)^2}\,,\\
&= \frac{2(s+1)}{(s+1)^2+1} + \frac{d}{ds}\frac{-1}{(s+1)^2+1}\,.
\end{aligned}$$

Así

$$\begin{aligned} y(t) &= 2\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s+1}{(s+1)^2+1}\right)(t) - t\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{-1}{(s+1)^2+1}\right)(t)\,, \\ &= 2e^{-t}\cos(t) + te^{-t}\mathrm{sen}(t)\,. \end{aligned}$$

Ejercicio 7.1.25. Sea $\Phi(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}$ con P, Q polinomios. Si $Q(s)$ tiene solo raíces simples (reales), digamos $Q(s) = (s-r_1)(s-r_2)\cdots(s-r_n)$ con $r_i \neq r_j$ si $i \neq j$, entonces

$$\Phi(s) = \frac{\frac{P(r_1)}{Q'(r_1)}}{s-r_1} + \cdots + \frac{\frac{P(r_n)}{Q'(r_n)}}{s-r_n}\,.$$

Ejemplo 7.1.26. Descomponga en fracciones parciales $\frac{s^2-2s+2}{s^3-s^2-4s+4}$.

Tenemos

$$P(s) = s^2 - 2s + 2\,, \quad Q(s) = s^3 - s^2 - 4s + 4 = (s-1)(s+2)(s-2)$$
$$\text{y} \quad Q'(s) = (s+2)(s-2) + (s-1)(s-2) + (s-1)(s+2).$$

Luego ocupando el ejercicio anterior obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{s^2-2s+2}{s^3-s^2+4s+4} &= \frac{\frac{-1}{3}}{s-1} + \frac{\frac{10}{12}}{s+2} + \frac{\frac{2}{4}}{s-2}\,, \\ &= \frac{-1}{3}\frac{1}{s-1} + \frac{5}{6}\frac{1}{s+2} + \frac{1}{2}\frac{1}{s-2}\,. \end{aligned}$$

Ejemplo 7.1.27. Resolvamos la ecuación

$$y'' - 2y' - 3y = e^t\,, \quad y(0) = y'(0) = 1\,.$$

Poniendo $Y(s) = \mathcal{L}(y(t))(s)$ y aplicando transformada de Laplace a nuestra ecuación obtenemos

$$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) - 2(sY(s) - y(0)) - 3Y(s) = \frac{1}{s-1}\,.$$

Luego

$$\begin{aligned} (s^2-2s-3)Y(s) &= \frac{1}{s-1} + s - 1\,, \quad \text{lo que implica} \\ Y(s) &= \frac{1}{(s-1)(s+1)(s-3)} + \frac{s-1}{(s+1)(s-3)} \\ &= \frac{1+(s-1)^2}{(s-1)(s+1)(s-3)} \\ &= -\frac{1}{4}\frac{1}{s-1} + \frac{5}{8}\frac{1}{s+1} + \frac{5}{8}\frac{1}{s-3}\,. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$y(t) = -\frac{1}{4}e^t + \frac{5}{8}e^{-t} + \frac{5}{8}e^{3t}\,.$$

7.2 Funciones Discontinuas

Definición 7.2.1. *$f : [0, +\infty] \longrightarrow \mathbb{R}$ se dice continua por partes si f tiene solo un número finito de puntos de discontinuidad en $[0, +\infty[$ y estas discontinuidades son de tipo salto.*

Ejemplo 7.2.2. Considere la función escalón (o salto)

$$u(t) = \begin{cases} 0 & si \quad t < 0 \\ \\ 1 & si \quad t > 0 \end{cases} \qquad (\textit{tiene salto en } \; t = 0)$$

Luego si para $a > 0$ definimos $f(t) = u(t-a)$, tenemos

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t < a \\ \\ 1 & \text{si} \quad t > a \end{cases} \qquad (\text{tiene salto en } \; t = a) \quad ,$$

y su transformada de Laplace es

$$\mathcal{L}(u(t-a)) \; = \; \int_0^a e^{-ts} \cdot 0dt \; + \; \int_a^\infty e^{-ts} \cdot 1dt \; = \; \frac{1}{s}\, e^{-as} \, .$$

Por lo tanto

$$\mathcal{L}(u(t-a)) = \frac{e^{-as}}{s} \quad \text{para} \quad s > 0 \, .$$

Ejemplo 7.2.3. Considere la función

$$f(t) = \begin{cases} 3 & t < 2 \\ -1 & 2 < t < 5 \\ 7 & 5 \leq t \end{cases}$$

En término de la función salto

$$f(t) \; = \; 3 - 4u(t-2) + 8u(t-5) \, ,$$

y su transformada de Laplace es

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(f(s)) \; &= \; 3\mathcal{L}(1) - 4\mathcal{L}(u(t-2)) + 8\mathcal{L}(u(t-5)) = \\ &= \; \frac{3}{s} - \frac{4}{s} e^{-2s} + \frac{8}{s} e^{-5s} \end{aligned}$$

Ejemplo 7.2.4. Sea $f : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Entonces para $a > 0$ se tiene

$$\mathcal{L}(f(t-a)u(t-a))(s) \; = \; e^{-as} \mathcal{L}(f(t)(s) \, .$$

En efecto

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(f(t-a)u(t-a)) &= \int_a^\infty e^{-ts} f\,\underbrace{(t-a)}_{u}\,dt \;=\; \int_0^\infty e^{-(u+a)s} f(u)du \\
&= e^{-as}\int_0^\infty e^{-us} f(u)du \;=\; e^{-as}\mathcal{L}(f(t))(s)\,.
\end{aligned}$$

Ejemplo 7.2.5. Calculemos

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{e^{-25}}{s^2}\right)(t)\,.$$

Sea

$$f(t) \;=\; \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2}\right)(t) \;=\; t\,.$$

Entonces

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{e^{-2s}}{s^2}\right)(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left(e^{-2s}\,\mathcal{L}(f(t))(s)\right)(t) = f(t-2)u(t-2) \\
&= (t-2)u(t-2) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t<2 \\ t-2 & \text{si} \quad t>2 \end{cases}
\end{aligned}$$

Ejemplo 7.2.6. Calculemos la transformada de Laplace de

$$f(t) = \begin{cases} t & 0 \le t < 1 \\ 2 & 1 \le t \le 2 \\ t^2 & 2 < t < \infty \end{cases}\,.$$

En términos de la función salto se escribe

$$f(t) \;=\; t + (2-t)u(t-1) + (t^2-2)u(t-2)\,.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(f(t))(s) &= \mathcal{L}(t)(s) + \mathcal{L}((2-t)u(t-1))(s) + \mathcal{L}((t^2-2)u(t-2))(s) \\
&= \frac{1}{s^2} + \mathcal{L}((1-(t-1))u(t-1))(s) + \\
&\quad\ \mathcal{L}(2+4(t-2)+(t-2)^2)u(t-2))(s) \\
&= \frac{1}{s^2} + \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s^2}\right)e^{-s} + \left(\frac{2}{s} + \frac{4}{s^2} + \frac{2}{s^3}\right)e^{-2s}
\end{aligned}$$

Ejemplo 7.2.7. La corriente I en un circuito RLC en serie está regida por la ecuación

$$I''(t) + 4I(t) \; = \; g(t)\,, \quad I(0) = I'(0) = 0\,.$$

con

$$g(t) \; = \; \begin{cases} 1 & 0 < t < 1 \\ -1 & 1 \leq t < 2 \\ 0 & 2 \leq t \end{cases}\,.$$

Determine la corriente en función del tiempo.

Tenemos $g(t) = u(t) - 2u(t-1) + u(t-2)$. Si ponemos $\widehat{I}(s) = \mathcal{L}(I)(s)$ obtenemos

$$\mathcal{L}(I'')(s) = s^2\widehat{I}(s) \quad \text{y} \quad \mathcal{L}(g(t))(s) = \frac{1}{s} - 2\frac{e^{-s}}{s} + \frac{e^{-2s}}{s}\cdot$$

Entonces aplicando transformada de Laplace a nuestra ecuación tenemos

$$\begin{aligned} s^2\widehat{I}(s) + 4\widehat{I}(s) \; &= \; \frac{1}{s} - 2\frac{e^{-s}}{s} + \frac{2^{-2s}}{s}\,, \quad \text{es}\, decir \\ \widehat{I}(s) \; &= \; \frac{1}{s(s^2+4)} - \frac{2e^{-s}}{s(s^2+4)} + \frac{2e^{-2s}}{s(s^2+4)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Pongamos} \quad \widehat{f}(s) \; &= \; \frac{1}{s(s^2+4)} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+4}\right) \\ \Longrightarrow \quad f(t) \; &= \; \frac{1}{4}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2-4}\right)(t) = \\ &= \; \frac{1}{4}\,(1-\cos(2t)) \\ \therefore \quad I(t) \; &= \; f(t) - 2f(t-1)u(t-1) + f(t-2)u(t-2) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{4}\,(1-\cos(2t)) \quad - \quad \frac{1}{2}\,[1-\cos(2(t-1))]\,u(t-1) + \frac{1}{4}\,[1-\cos(2(t-2))]\,u(t-2)$$

Ejemplo 7.2.8. Determine $\quad \mathcal{L}(f(t))(s) \quad$ si $\quad f(t) = \begin{cases} \dfrac{sen(t)}{t} & t > 0 \\ 1 & t = 0 \end{cases}$

Tenemos

$$\begin{aligned} \text{sen}(t) \; &= \; t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^s}{s!} - \cdots \; = \; \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!} \qquad \forall\, t \in \mathbb{R} \\ \Longrightarrow \quad \frac{\text{sen}(t)}{t} \; &= \; 1 - \frac{t^s}{3!} + \frac{t^4}{s!}\cdots \; = \; \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{t^{2k}}{(2k+1)!} \qquad \forall\, t \in \mathbb{R} \quad t \neq 0\,. \end{aligned}$$

Además como $\lim_{t \longrightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(t)}{t} = 1$, tenemos que

$$f(t) \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{t^{2k}}{(2k+1)!} \qquad \forall\, t \in \mathbb{R},$$

y $f(t)$ es continua y de orden exp. b $\quad (\forall b > 0)$.

Así $\mathcal{L}(f(t))(s)$ existe para todo s suficientemente grande y como para todo número natural y $s > 0$, $\mathcal{L}(t^n)(s) = \frac{n!}{s^{n+1}}$, tenemos que

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(f(t))(s) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\, \mathcal{L}(t^{2k})(s) \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\, \frac{(2k)!}{s^{2k+1}} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}\, \frac{1}{s^{2k+1}} \;=\; \frac{1}{s} - \frac{1}{3s^3} + \frac{1}{5s^5} - \frac{1}{7s^7} + \cdots
\end{aligned}$$

Recuerdo: Para $|x| < 1$ tenemos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1+x^2} &= 1 - x^2 + x^4 - x^6 = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k\, x^{2k} \quad \text{y} \\
\arctan(x) &= \int_0^x \frac{1}{1+x^2}\, du = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k\, \frac{x^{2k+1}}{2k+1}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\mathcal{L}(f(t))(s) \;=\; \arctan\left(\frac{1}{s}\right) \qquad (s > 1).$$

7.3 Funciones Periódicas

Definición 7.3.1. *Se dice que una función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es periódica de periodo T, si T es el menor número positivo que verifica*

$$f(t+T) = f(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Ejemplos 7.3.2.

$sen(t)$, $\cos(t)$	son periódicas de periodo 2π
$\tan(t)$	es periódica de periodo π.

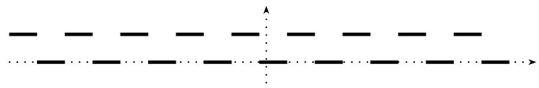

Figure 7.1: Gráfico de la curva $y = y(x)$

Observación 7.3.3. Para especificar una función periódica, basta dar sus valores sobre un periodo.

Así la función

$$f(t) = \begin{cases} 1 & 0 < t < 1 \\ \\ 0 & 1 < t < 2 \end{cases} \qquad \text{y} \quad f(t) \text{ tiene periodo } 2$$

tiene gráfico como el mostrado en Figura 7.1.

Teorema 7.3.4. *Si $f(t)$ es una función periódica de periodo T que es continua por partes en el intervalo $[0, T]$, entonces para todo $s > 0$*

$$\mathcal{L}(f(t))(s) \;=\; \frac{1}{1 - e^{-Ts}} \int_0^T e^{-st} f(t)dt\,.$$

Demostración. Para $s > 0$ tenemos

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(f(t))(s) &= \int_0^\infty e^{-ts} f(t)dt \\
&= \int_0^T e^{-ts} f(t)dt + \int_T^{2T} e^{-ts} f(t)dt + \int_{2T}^{3T} e^{-ts} f(t)dt + \cdots \\
&= \int_0^T e^{-ts} f(t)dt + \int_0^T e^{-(t+T)s} f(t+T)dt + \int_0^T e^{-(t+2T)} f(t+2T)dt + \cdots \\
&= \int_0^T e^{-ts} f(t)dt + e^{-Ts} \int_0^T e^{-st} f(t)dt + e^{-2Ts} \int_0^T e^{-st} f(t)dt + \cdots \\
&= \left(1 + e^{-Ts} + e^{-2Ts} + \cdots\right) \int_0^T e^{-st} f(t)dt \\
&= \frac{1}{1 - e^{-Ts}} \int_0^T e^{-st} f(t)dt\,.
\end{aligned}$$

Ejemplo 7.3.5. Calculemos la transformada de Laplace de la función periódica $f(t)$ del ejemplo que aparece en la observación 7.3.3.

Para $s > 0$ tenemos

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(f(t))(s) &= \frac{1}{1-e^{-2s}} \int_0^2 e^{-st} f(t)dt \\
&= \frac{1}{1-e^{-2s}} \int_0^1 e^{-st} dt = \frac{1}{1-e^{-2s}} \cdot \frac{-1}{s}(e^{-s}-1) \\
&= \frac{1-e^{-s}}{s(1-e^{-2s})} = \frac{1}{s(1+e^{-s})} \,.
\end{aligned}$$

7.4 Convolución

Consideremos el problema

$$y'' + y = g(t)\,;\; y(0) = 0\,,\; y'(0) = 0\,.$$

Poniendo

$$Y(s) = \mathcal{L}(y(t))(s) \quad \text{y} \quad G(s) = \mathcal{L}(g(t))(s)\,,$$

aplicando transformada de Laplace a la ecuación obtenemos

$$s^2 Y(s) + Y(s) = G(s) \quad \Longrightarrow \quad Y(s) = \frac{1}{s^2+1}\, G(s)\,.$$

Por lo tanto

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2+1} \cdot G(s)\right)(t)\,.$$

Definición 7.4.1. *Sean $f, g : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ continuas por parte. La* **convolución** *de las funciones $f(t)$ y $g(t)$, es una nueva función, que se denota por $f * g$, y que se define por*

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(t-v) g(v) dv\,.$$

Ejemplo 7.4.2.

$$t * t^2 = \int_0^t (t-v)v^2 du = t\,\frac{v^3}{3} - \frac{v^4}{4}\Big/_0^t = \frac{t^4}{3} - \frac{t^4}{4} = \frac{t^4}{12}\,.$$

Propiedades: Sean $f, g, h : [0, \infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ continuas por parte. Entonces:

1) $f * g = g * f$.

2) $f * (g + h) = f * g + f * h$.

3) $f * (g * h) = (f * g) * h$.

4) $f * 0 = 0$.

Demostración. Haremos la demostración de 1). Los item 2), 3) y 4) quedan de ejercicio.

$$\begin{aligned}(f*g)(t) &= \int_0^t f(t-w)g(w)dw = \int_t^0 f(w)g(t-w)(-dw) = \\ &= \int_t^0 g(t-w)f(w)dw = (g*f)(t)\,.\end{aligned}$$

Teorema 7.4.3. *Sean* $f, g : [0, \infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ *continuas por parte y de orden exp.* α. *Entonces*

$$\mathcal{L}((f*g)(t))(s) = \mathcal{L}(f(t))(s) \cdot \mathcal{L}(g(t))(s)\,.$$

o equivalentemente si $F(s) = \mathcal{L}(f(t))(s)$ *y* $G(s) = \mathcal{L}(g(t)(s)$, *entonces*

$$\mathcal{L}^{-1}(F(s)G(s))(t) = (f*g)(t)\,.$$

Demostración. Para $s > \alpha$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}((f*g)(t))(s) &= \int_0^\infty e^{-ts}(f*g)(t)dt \\ &= \int_0^\infty e^{-st}\left(\int_0^t f(t-v)g(v)dv\right)dt \\ &= \int_0^\infty e^{-st}\left(\int_0^\infty u(t-v)f(t-v)g(v)dv\right)dt \\ &= \int_0^\infty g(v)\left(\int_0^\infty e^{-st}u(t-v)f(t-v)dt\right)dv \\ &= \int_0^\infty g(v)\mathcal{L}(f(t-v)u(t-v))(s)dv \\ &= \int_0^\infty g(v)e^{-sv}F(s)dv = F(s)\int_0^\infty e^{-sv}g(v)dv \\ &= F(s)G(s)\,.\end{aligned}$$

Entonces volviendo al problema inicial

$$Y(s) = \frac{1}{s^2+1}G(s) = \mathcal{L}(\mathrm{sen}(t))(s) \cdot \mathcal{L}(g(t))(s)\,,$$

lo que implica

$$y(t) = (\mathrm{sen} * g)(t) = \int_0^t \mathrm{sen}\,(t-v)g(v)dv\,.$$

Ejemplo 7.4.4. $(1 * f)(t) = \int_0^t f(u)du.$

$$\Longrightarrow \quad \mathcal{L}(1 * f(t))(s) = \mathcal{L}(1)(s) \cdot \mathcal{L}(f(t))(s) = \frac{1}{s}\mathcal{L}(f(t))\,.$$

Ejemplo 7.4.5. $t * t = \displaystyle\int_0^t (t-v)vdv = t\frac{v^2}{2} - \frac{v^3}{3}\Big/_0^t = \frac{t^3}{2} - \frac{t^3}{3} = \frac{t^3}{6}\cdot$

$$\Longrightarrow \quad \mathcal{L}(t * t)(s) = \mathcal{L}(t)(s) \cdot \mathcal{L}(t)(s) = \frac{1}{s^2} \cdot \frac{1}{s^2} = \frac{1}{s^4}\cdot$$

Ejemplo 7.4.6. Calculemos $t * \operatorname{sen}(t)$. Tenemos

$$\begin{aligned} t * sen(t) &= \int_0^t (t-v)\, sen(v)dv = t\int_0^t sen(v)dv - \int_0^t v\, sen(v)dv \\ &= -t\,\cos(v)\Big/_0^t - [-v\,\cos(v)\Big/_0^t - \int_0^t \cos(v)dv] = \\ &= -t\,\cos(t) \;+\; t \;+\; t\,\cos(t) \;-\; sen(t) = t \;-\; sen(t)\,. \end{aligned}$$

Por otra parte

$$\mathcal{L}(t * sen(t))(s) = \mathcal{L}(t)(s) \cdot \mathcal{L}(sen(t))(s) = \frac{1}{s^2} \cdot \frac{1}{s^2+1} = \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2+1}\,.$$

Ejemplo 7.4.7. $t * e^t \;=\; \int_0^t (t-v)\, e^v\, dv \;=\; e^t - t - 1$ y

$$\mathcal{L}(t * e^t)(s) = \mathcal{L}(t)(s) \cdot \mathcal{L}(e^t)(s) = \frac{1}{s^2} \cdot \frac{1}{s-1} = \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s}\,.$$

Ejemplo 7.4.8. $sen(t) * \cos(t) \;=\; \displaystyle\int_0^t sen\,(t-v)\;\cos(v)\,dv \;=\; \int_0^t (sen(t)\;\cos(v) -$ $\cos(t)\, sen(v))\;\cos(v)\,dv \;=\; \cdots \;=\; \dfrac{1}{2}\,t\, sen(t)\,.$
Por otra parte

$$\mathcal{L}\,(sen\,(t) * \cos(t))(s) \;=\; \frac{1}{s^2+1} \cdot \frac{s}{s^2+1} \;=\; \frac{s}{(s+1)^2}\,.$$

Ejemplo 7.4.9. Resolvamos la ecuación

$$y'' + y \;=\; \cos(t)\,, \quad y(0) \;=\; y'(0) \;=\; 0\,.$$

Poniendo $Y(s) = \mathcal{L}(y(t))(s)$ y aplicando transformada de Laplace obtenemos

$$s^2Y(s) \;+\; Y(s) \;=\; \frac{s}{s^2+1}\,.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{s}{(s^2+1)^2} = \frac{1}{s^2+1}\cdot\frac{s}{s^2+1} \\ &= \mathcal{L}(\operatorname{sen}(t))(s)\cdot\mathcal{L}(\cos(t))(s) = \mathcal{L}(\operatorname{sen}(t) * \cos(t))(s)\,, \end{aligned}$$

y así

$$y(t) = \operatorname{sen}(t) * \cos(t) = \frac{1}{2}\,t\operatorname{sen}(t)\,.$$

Ejemplo 7.4.10. Resolvamos

$$y'' - 5y' + 6y = e^{-2t}\,, \quad y(0) = 0\,, \quad y'(0) = -2\,.$$

Poniendo $Y(s) = \mathcal{L}(y(t))(s)$ y aplicando transformada de Laplace obtenemos

$$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) + 5(sY(s) - y(0)) + 6Y(s) = \frac{1}{s+2}\,.$$

Entonces

$$\begin{aligned} (s^2 - 5s + 6)Y(s) + 2 &= \frac{1}{s+2} \\ \Longrightarrow \quad Y(s) &= \left(\frac{1}{s+2} - 2\right)\frac{1}{s^2-5s+6} \\ &= \frac{1}{(s+2)(s-2)(s-3)} - \frac{2}{(s-2)(s-3)}\,. \end{aligned}$$

Pero

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s-2}\cdot\frac{1}{s-3}\right)(t) &= e^{2t} * e^{3t} = \int_0^t e^{2(t-v)}\,e^{3v}\,dv \\ &= \int_0^t e^{2t+v}\,dv = e^{2t}\int_0^t e^v dv = e^{2t}(e^t - 1) \\ &= e^{3t} - e^{2t}\,. \end{aligned}$$

Además

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s+2}\cdot\frac{1}{(s-2)(s-3)}\right) &= e^{-2t} * \left(e^{3t}-e^{2t}\right) = \int_0^t e^{-2(t-v)}\left(e^{3v}-e^{2v}\right)dv \\
&= \int_0^t \left(e^{-2t+5v} - e^{-2t+4v}\right)dv \\
&= e^{-2t}\left(\frac{1}{5}\,e^{5v}\Big/_0^t - \frac{1}{4}\,e^{4v}\Big/_0^t\right) \\
&= e^{-2t}\left(\frac{1}{5}\,e^{5t} - \frac{1}{5} - \frac{1}{4}\,e^{4t} + \frac{1}{4}\right) \\
&= \frac{1}{5}\,e^{3t} - \frac{1}{4}\,e^{2t} + \frac{1}{20}\,e^{-2t}\,.
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
y(t) &= \frac{1}{5}e^{3t} - \frac{1}{4}e^{2t} + \frac{1}{20}e^{-2t} - 2e^{3t} + 2e^{2t} \\
&= -\frac{9}{5}e^{3t} - \frac{7}{4}e^{2t} + \frac{1}{20}e^{-2t}\,.
\end{aligned}$$

Ejercicio 7.4.11. Usando transformada de Laplace, encuentre la solución de

$$y'' - 2y' + 5y = -8e^{-t}\,, \quad y(0) = 2\,, y'(0) = 12\,.$$

7.5 Ecuaciones Integrales

Sean $f(x), k(x)$ funciones dadas. La ecuación

$$f(x) = y(x) + \int_0^x k(x-t)y(t)dt$$

donde $y(x)$ es la función incógnita, se llama **ecuación integral**.

Solución. Aplicando transformada de Laplace a ambos lados obtenemos

$$\begin{aligned}
&\mathcal{L}(f(x))(s) = \mathcal{L}(y(x))(s) + \mathcal{L}((k*y)(x))(s) \\
\Longrightarrow\ &\mathcal{L}(f(x))(s) = \mathcal{L}(y(x))(s) + \mathcal{L}(k(x))(s)\cdot\mathcal{L}(y(x))(s) \\
\Longrightarrow\ &\mathcal{L}(y(x))(s) = \frac{\mathcal{L}(f(x))(s)}{1+\mathcal{L}(k(x))(s)} \\
\Longrightarrow\ &y(x) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\mathcal{L}(f(x))(s)}{1+\mathcal{L}(k(x))(s)}\right](x)
\end{aligned}$$

Ejemplo 7.5.1. Resolvamos

$$y(x) \;=\; x^3 + \int_0^x sen\,(x-t)y(t)dt\,.$$

Tenemos

$$\mathcal{L}(y(x))(s) \;=\; \mathcal{L}(x^3)(s) + \mathcal{L}(\text{sen}\,(x))(s)\cdot\mathcal{L}(y(x))(s)$$

$$\Longrightarrow\;\mathcal{L}(y(x))(s) \;=\; \frac{\mathcal{L}(x^3)(s)}{1-\mathcal{L}(\text{sen}(x))(s)} \;=\; \frac{\frac{3!}{s^4}}{1-\frac{1}{1+s^2}} \;=\; \frac{3!}{s^4}\left(\frac{s^2+1}{s^2}\right) \;=\; \frac{3!}{s^4}+\frac{3!}{s^6}\,,$$

$$\Longrightarrow\; y(x) \;=\; x^3+\frac{1}{20}x^5\,.$$

7.6 Función de transferencia

Considere el problema de valores iniciales

$$y''+ay'+by \;=\; f(t)\,,\quad y(0)=y'(0)=0\,.$$

Este puede ser pensado como un sistema mecánico o eléctrico en reposo que es excitado por una **entrada** $f(t)$. Aplicando transformada de Laplace obtenemos

$$s^2\,Y(s) \;+\; a\,s\,Y(s) \;+\; b\,Y(s) \;=\; \mathcal{L}(f(t))(s) = F(s)$$

y despejando

$$Y(s) \;=\; \frac{F(s)}{s^2+a\,s+b} \;=\; P(s)\,F(s)\,.$$

La función $P(s) \;=\; (s^2+a\,s+b)^{-1}$ se llama **función de transferencia** del sistema. En el dominio de las frecuencias el sistema puede ser descrito por el diagrama de la Figura 7.2, donde el rectángulo representa la acción del sistema en reposo sobre la entrada, lo que en términos de transformada de Laplace consiste en multiplicar por la función de transferencia.
Aplicando transformada de Laplace inversa obtenemos

$$y(t) \;=\; \mathcal{L}^{-1}(Y(s))(t) \;=\; \mathcal{L}^{-1}(P(s)\,F(s))(t)\,,$$

y luego

$$y(t) \;=\; p(t)*f(t)$$

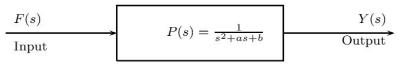

Figure 7.2: Diagrama del sistema en el dominio de las frecuencias

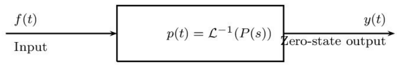

Figure 7.3: Diagrama del sistema en el dominio del tiempo

donde $p(t) = \mathcal{L}^{-1}(P(s))(t)$ se llama la **función peso** del sistema, e $y(t)$ se llama **respuesta de estado-cero**. En el dominio del tiempo el sistema puede entonces ser descrito por el diagrama de la Figura 7.3, donde el rectángulo representa la acción del sistema en reposo sobre la entrada, lo que consiste en hacer convolución con la función peso.

Ejercicio 7.6.1. Demuestre que $p(0) = 0$ y que si los coeficientes a y b son positivos se tiene

$$\lim_{t\to\infty} p(t) = 0 \quad y \quad \lim_{t\to\infty} p'(t) = 0\,.$$

Escribamos $y(t) = p(t) * f(t)$ en su forma integral

$$y(t) \;=\; \int_0^t p(\tau)\, f(t-\tau)\, d\tau\,.$$

Como $0 \le \tau \le t$, la integral puede ser interpretada diciendo que la entrada evaluada en τ unidades en el pasado, a saber $f(t-\tau)$, es ponderada con el valor de la función peso evaluada en el tiempo τ.

Para sistemas del mundo real los coeficientes a y b son positivos y la entrada $f(t)$ es una función acotada. El hecho que a y b sean positivos implica que la función peso $p(\tau)$ tiende a cero cuando τ se aproxima a infinito. Luego existe $T > 0$ tal que $p(\tau)$ es despreciable para $\tau \ge T$. Entonces, para $t > T$, tenemos

$$y(t) \;=\; \int_0^T p(\tau)\, f(t-\tau)\, d\tau \;+\; \int_\tau^t p(\tau)\, f(t-\tau)\, d\tau\,,$$

y el valor de la segunda integral se puede considerar despreciable. Una manera de decir esto es que los valores de la entrada para más de T unidades en el pasado tienen muy poco efecto sobre la respuesta; es decir, para cualquier t, las contribuciones de $f(t-\tau)$ sobre la respuesta son despreciables para $\tau \ge T$.

Ejercicio 7.6.2. Demuestre que la solución del problema de valores iniciales

$$y'' + ay' + by \ = \ f(t)\,, \quad y(0) = y_0\,, \quad y'(0) = y_1\,,$$

es

$$y(t) \ = \ p(t) * f(t) \ + \ (a\,y_0 \ + \ y_1)\,p(t) \ + \ y_0\,p'(t)\,.$$

7.7 Impulso unitario

Dado un sistema mecánico o eléctrico, deseamos modelar una entrada de gran magnitud que ocurre sobre un pequeño período de tiempo. Para describir este comportamiento primero consideremos para cualquier número positivo ε la función

$$\delta_\varepsilon(t) \ = \ \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t < 0\,, \\ \frac{1}{\varepsilon} & \text{si} \quad 0 \le t < \varepsilon\,, \\ 0 & \text{si} \quad t \ge \varepsilon\,. \end{cases}$$

Ahora dado $t_0 > 0$, sea $\delta_\varepsilon(t-t_0)$ la función $\delta_\varepsilon(t)$ trasladada t_0 unidades a la derecha:

$$\delta_\varepsilon(t-t_0) \ = \ \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t < t_0\,, \\ \frac{1}{\varepsilon} & \text{si} \quad t_0 \le t < t_0+\varepsilon\,, \\ 0 & \text{si} \quad t \ge t_0+\varepsilon\,, \end{cases}$$

Usando la función escalón unitario se puede escribir de la forma

$$\delta_\varepsilon(t-t_0) \ = \ \frac{1}{\varepsilon}\,[u(t-t_0) \ - \ u(t-t_0-\varepsilon)]\,,$$

y su gráfico es como el de la Figura 7.4.

Claramente, cuando ε se aproxima a cero, el impulso rectangular $\delta_\varepsilon(t-t_0)$ es cada vez más alto y angosto y el límite no existe.

Aunque el límite $\lim_{\varepsilon\to 0}\ \delta_\varepsilon(t-t_0)$ no existe en el sentido usual, uno puede derivar algunas interesante propiedades de la función. Primero, como $\delta_\varepsilon(t-t_0) = 0$ para todo t fuera del intervalo $t_0 \le t \le t_0+\varepsilon$, se sigue que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta_\varepsilon(t-t_0)\,dt \ = \ \int_{t_0}^{t_0+\varepsilon} \frac{1}{\varepsilon}\,dt \ = \ 1\,. \tag{7.2}$$

Si $\delta_\varepsilon(t-t_0)$ es pensado como una fuerza, entonces 7.2 dice que el **impulso total** es unitario.

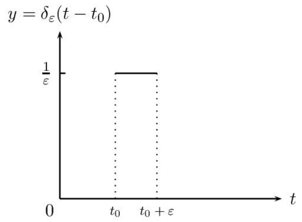

Figure 7.4: Gráfico de $y = \delta_\varepsilon(t - t_0)$

Segundo, dada cualquier función continua $f(t)$ definida en el intervalo $-\infty < t < \infty$, tenemos

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta_\varepsilon(t - t_0)\, f(t)\, dt \;=\; \int_{t_0}^{t_0+\varepsilon} \frac{1}{\varepsilon}\, f(t)\, dt \;=\; \frac{1}{\varepsilon} \int_{t_0}^{t_0+\varepsilon} f(t)\, dt\,.$$

Recordemos que el teorema del valor medio para integrales establece

$$\int_a^b f(t)\, dt \;=\; (b - a)\, f(\tau)\,,$$

para algún τ en el intervalo $a \le t \le b$. En consecuencia,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta_\varepsilon(t - t_0)\, f(t)\, dt \;=\; \frac{1}{\varepsilon}\,[\varepsilon\, f(\tau_\varepsilon)] \;=\; f(\tau_\varepsilon)\,, \tag{7.3}$$

para algún τ_ε en el intervalo $t_0 \le t \le t_0 + \varepsilon$.

Tercero, la representación de $\delta_\varepsilon(t - t_0)$ en términos de la función escalón unitario implica que para $t_0 > 0$

$$\mathcal{L}(\delta_\varepsilon(t - t_0))(s) \;=\; \frac{1}{\varepsilon}\left[\frac{e^{-s\,t_0}}{s} \;-\; \frac{e^{-s(t_0+\varepsilon)}}{s}\right] \;=\; e^{-s\,t_0}\,\frac{1 \;-\; e^{-s\,\varepsilon}}{s\,\varepsilon}\,\cdot \tag{7.4}$$

Supongamos ahora que se permite aproximar ε a cero en cada una de las propiedades 7.2, 7.3 y 7.4. Si $\delta(t - t_0)$ denota el resultado de hacer ε tender a cero, entonces 7.2 implica

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0)\, dt \;=\; 1\,. \tag{7.5}$$

En la propiedad 7.3, como τ_ε debe permanecer en el intervalo $t_0 \le t \le t_0 + \varepsilon$, tenemos $\lim_{\varepsilon \to 0} \tau_\varepsilon \;=\; t_0$ y

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0)\, f(t)\, dt \;=\; f(t_0)\,, \tag{7.6}$$

para cualquier función continua definida en el intervalo $-\infty < t < \infty$. Realmente, basta que $f(t)$ sea continua solamente en alguna vecindad de $t = t_0$, y puede estar definida como cero fuera de ese intervalo.

En la propiedad 7.4, que define la transformada de Laplace de $\delta_\varepsilon(t-t_0)$, observe que por la regla de l'Hôpital

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1 - e^{-s\varepsilon}}{s\,\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{s\,e^{-s\varepsilon}}{s} = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{e^{-s\varepsilon}}{1} = 1\,.$$

Por lo tanto,

$$\mathcal{L}(\delta(t-t_0))(s) = e^{-s\,t_0}\,. \tag{7.7}$$

De esta forma haciendo $t_0 \to 0$ obtenemos

$$\mathcal{L}(\delta(t))(s) = 1\,. \tag{7.8}$$

Este resultado nos previene que $\delta(t)$ no es una función *bien comportada*, ya que si lo fuera, su transformada de Laplace sería una función que va a cero cuando s va para infinito.

La "función" $\delta(t)$ construida anteriormente se llama **función impulso unitario** o **función delta de Dirac**. No es una función en el sentido tradicional pero es un ejemplo de lo que se suele llamar una "función generalizada" o "distribución" .

Ejemplo 7.7.1. Encuentre la respuesta al estado-cero para la ecuación

$$y'' - y = \delta(t-1)\,.$$

El lado derecho puede ser mirado como un impulso unitario aplicado en $t = 1$. Si $Y(s)$ es la transformada de Laplace de $y(t)$, entonces usando la fórmula 7.7 tenemos

$$s^2\,Y(s) - Y(s) = e^{-s}\,.$$

Por lo tanto,

$$Y(s) = e^{-s}\left[\frac{1}{s^2-1}\right],$$

y luego

$$y(t) = [\operatorname{senh}(t-1)]\,u(t-1)\,,$$

o

$$y(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } \ 0 \le t \le 1\,, \\ \operatorname{senh}(t-1) & \text{si } \ t \ge 1\,. \end{cases}$$

La función impulso unitario es una herramienta útil en el análisis de sistemas lineales. Recordemos que en nuestra discusión de la subsección 7.6, donde fue estudiado el problema de respuesta de estado-cero

$$y'' + a\,y' + b\,y = f(t)\,, \quad y(0) = 0\,, \quad y'(0) = 0\,,$$

Figure 7.5: Digrama del sistema en el dominio de las frecuencias y del tiempo

obtuvimos la relación

$$Y(s) \;=\; \frac{F(s)}{s^2 \;+\; a\,s \;+\; b} \;=\; P(s)\,F(s)\,.$$

Si $f(t) \;=\; \delta(t)$, entonces $F(s) \;=\; 1$. Así, si la *solución* de la ecuación diferencial con $f(t) \;=\; \delta(t)$ es definida como *respuesta al impulso*, tenemos la siguiente definición.

Definición 7.7.2. *La función transferencia $P(s)$ es la transformada de Laplace de la respuesta al impulso.*

Recordemos también que la función peso $p(t)$ fue definida por la relación $p(t) \;=\; \mathcal{L}^{-1}(P(s))(t)$ y la respuesta al estado-cero como

$$y(t) \;=\; \mathcal{L}^{-1}(Y(s))(t) \;=\; \mathcal{L}^{-1}(P(s)\,F(s))(t)\,.$$

Pero si $F(s) \;=\; 1$, entonces $y(t) \;=\; p(t)$ y tenemos la siguiente consecuencia.

Corolario 7.7.3. *La función peso $p(t)$ es la respuesta de estado-cero correspondiente a la función entrada impulso unitario.*

Usando la terminología desarrollada en este párrafo, podemos decir que la función peso es simplemente la respuesta al impulso. En el dominio del tiempo y en el dominio de las frecuencias los diagramas del sistema son como los de la Figura 7.5.

7.8 $\mathcal{L}$ es inyectivo

En esta sección presentaremos la demostración del Teorema 7.1.21 que se refiere a la inyectividad de la transformada de Laplace. El siguiente Lema, pieza fundamental de nuestra prueba, que es consecuencia inmediata del Teorema de Aproximación polinomial de Weierstrass, no será demostrado.

Lemma 7.8.1. Si $g(t)$ es continua en el intervalo $[0,\, 1]$ y para todo entero no negativo n se tiene $\displaystyle\int_0^1 u^n\, g(u)du = 0$, entonces $g(t) = 0$ para todo $t \in [0,\, 1]$.

Demostración del Teorema 7.1.21. Sean f y g funciones continuas en $[0, +\infty[$ tales que $\mathcal{L}(f(t))(s) = \mathcal{L}(g(t))(s)$ para todo $s \geq s_0$. Debemos demostrar que $f(t) = g(t)$ para todo $t \geq 0$.
Considerando la función $h(t) = f(t) - g(t)$, tenemos que $H(s) = \mathcal{L}(h(t))(s) = 0$ para todo $s > s_0$. Luego, basta probar que $h(t) = 0$ para todo $t \geq 0$.
En particular, para todo entero no negativo n se tiene

$$0 \;=\; H(s_0 + n + 1) \;=\; \int_0^{\infty} e^{-(n+1)t}\, e^{-s_0 t}\, h(t)dt\,. \tag{7.9}$$

Sea $v(t) \;=\; \displaystyle\int_0^t e^{-s_0 u} h(u)du$. Por lo tanto, v es continua en $[0, +\infty[$, $v(0) = 0$ y $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} v(t) = H(s_0) = 0$.
Integrando (7.9) por partes obtenemos

$$0 \;=\; H(s_0 + n + 1) \;=\; \lim_{R\to+\infty} [e^{-(n+1)R} v(R) + (n+1) \int_0^R e^{-(n+1)t} v(t)dt]\,,$$

lo que implica

$$\int_0^{\infty} e^{-(n+1)t} v(t)dt \;= 0\,, \quad \forall n = 0, 1, \cdots$$

Hagamos el cambio de variables $u = e^{-t}$. Por lo tanto, $e^{-(n+1)t} = u^(n+1)$, $t = -\ln(u)$ y $dt = -\frac{1}{u}du$. Entonces si ponemos $g(u) = v(-\ln(u))$, tenemos

$$0 \;=\; \int_0^{\infty} e^{-(n+1)t} v(t)dt \;=\; \int_0^1 u^{n+1} g(u) \cdot \frac{-1}{u} du\,,$$

que implica

$$\int_0^1 u^n g(u)du \;=\; 0\,, \quad \forall\, n = 0, 1, \cdots$$

Lema anterior implica $g(t) = 0$ para todo $t \in [0,\, 1]$. Pero $g(t) = v(-\ln(t))$, y por lo tanto $v(t) = 0$ para todo $t \geq 0$.

Tenemos entonces $0 \;=\; v(t) \;=\; \displaystyle\int_0^t e^{-s_0 u} h(u)du$, y derivando $h(t) = 0$ para todo $t \geq 0$.

7.9 Ejercicios resueltos

Ejercicio 7.9.1. Usando transformada de Laplace encuentre la solución de la ecuación

$$y'' - 2y' + 5y \;=\; -8e^{-t} \quad y(0) \;=\; 2 \quad y'(0) \;=\; 12\,.$$

Solución. Llamemos $Y(s) = \mathcal{L}(y(t))(s)$. Entonces

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{L}(y'(t))(s) & = & sY(s) - y(0) \;=\; sY(s) - 2\,, \\ \mathcal{L}(y''(t))(s) & = & s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) \;=\; s^2Y(s) - 2s - 12 \qquad \text{y} \\ \mathcal{L}(-8e^{-t})(s) & = & -8\mathcal{L}(e^{-t})(s) \;=\; \dfrac{-8}{s+1}\,. \end{array}$$

Luego aplicando transformada de Laplace a nuestra ecuación obtenemos

$$(s^2 - 2s + 5)Y(s) - 2s - 8 \;=\; \frac{-8}{s+1}\,,$$

lo que implica

$$\begin{array}{rcl} Y(s) & = & \dfrac{2s^2 + 10s}{(s^2 - 2s + 5)(s+1)} \\ & = & \dfrac{3(s-1) + 2\cdot 4}{(s-1)^2 + 2^2} - \dfrac{1}{s+1}\,. \end{array}$$

Por lo tanto

$$\begin{array}{rcl} y(t) & = & \mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{3(s-1) + 2\cdot 4}{(s-1)^2 + 2^2} - \dfrac{1}{s+1}\right)(t) \\ & = & 3\mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{s-1}{(s-1)^2 + 2^2}\right)(t) + \\ & & 4\mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{2}{(s-1)^2 + 2^2}\right)(t) - \\ & & \mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{1}{s+1}\right)(t) \\ & = & 3e^t\cos(2t) + 4e^t\mathrm{sen}(2t) - e^{-t}\,. \end{array}$$

Ejercicio 7.9.2. Usando transformada de Laplace encuentre la solución de

$$y'' + 4y' + 13y = 2t + 3e^{-2t}\cos(3t)\,, \quad y(0) = 0\,, \quad y'(0) = -1\,.$$

Solución. Sea $Y(s) = \mathcal{L}(y(t))(s)$. Al aplicar transformada de Laplace a nuestra ecuación obtenemos

$$s^2Y(s) + 1 + 4sY(s) + 13Y(s) \;=\; \frac{2}{s^2} + \frac{3(s+2)}{(s+2)^2 + 9}\,,$$

lo que implica

$$Y(s) \;=\; -\frac{1}{s^2 + 4s + 13} + \frac{2}{s^2(s^2 + 4s + 13)} + \frac{3(s+2)}{(s^2 + 4s + 13)^2}\,.$$

Tenemos
$$\frac{1}{s^2+4s+13} = \frac{1}{(s+2)^2+9} = \frac{1}{3}\frac{3}{(s+2)^2+9}$$
y luego
$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{-1}{s^2+4s+13}\right)(t) \;=\; -\frac{1}{3}\,e^{-2t}\,\mathrm{sen}(3t)\,.$$
Además si ponemos
$$\begin{aligned}\frac{2}{s^2(s^2+4s+13)} &= \frac{A}{s}+\frac{B}{s^2}+\frac{Cs+D}{s^2+4s+13}\\ &= \frac{As(s^2+4s+13)+B(s^2+4s+13)+(Cs+D)s^2}{s^2(s^2+4s+13)}\,,\end{aligned}$$
obtenemos
$$A=\frac{-8}{169},\quad B=\frac{2}{13},\quad C=\frac{8}{169},\quad D=\frac{6}{169}\,.$$
Entonces
$$\begin{aligned}\frac{2}{s^2(s^2+4s+13)} &= \frac{-8}{169}\cdot\frac{1}{s}+\frac{2}{13}\cdot\frac{1}{s^2}+\frac{1}{169}\cdot\frac{8s+6}{s^2+4s+13}\\ &= \frac{-8}{169}\cdot\frac{1}{s}+\frac{2}{13}\cdot\frac{1}{s^2}+\frac{8}{169}\cdot\frac{s+2}{(s+2)^2+9}-\frac{10}{3\cdot 169}\cdot\frac{3}{(s+2)^2+9}\,,\end{aligned}$$
y
$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2}{s^2(s^2+4s+13)}\right)(t) \;=\; \frac{-8}{169}+\frac{2}{13}t+\frac{8}{169}\,e^{-2t}\,\cos(3t)-\frac{10}{507}\,e^{-2t}\,\mathrm{sen}(3t)\,.$$
Finalmente, como
$$\begin{aligned}\frac{3(s+2)}{(s^2+4s+13)^2} &= -\frac{3}{2}\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s^2+4s+13}\right)\\ &= -\frac{1}{2}\frac{d}{ds}\left(\frac{3}{(s+2)^2+9}\right)\end{aligned}$$
obtenemos
$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{3(s+2)}{(s^2+4s+13)^2}\right)(t) \;=\; \frac{1}{2}t\,e^{-2t}\,\mathrm{sen}(3t)\,.$$
Por lo tanto
$$y(t) \;=\; -\frac{179}{507}\,e^{-2t}\,\mathrm{sen}(3t)+\frac{8}{169}\,e^{-2t}\,\cos(3t)+\frac{1}{2}t\,e^{-2t}\,\mathrm{sen}(3t)+\frac{2}{13}t-\frac{8}{169}\,.$$

Ejercicio 7.9.3. a) Si $y(t)$ es una solución de la ecuación de Bessel de orden p :
$$t^2y''(t)+ty'(t)+(t^2-p^2)y(t) \;=\; 0\,,$$

muestre que la transformada de Laplace $Y(s) = \mathcal{L}(y(t))(s)$ satisface

$$(1+s^2)Y''(s) + 3sY'(s) + (1-p^2)Y(s) \;=\; 0\,.$$

b) Resolver esta última ecuación para $p = 0$, expresándola en la forma

$$\frac{d}{ds}[A(s)Y'(s) + B(s)Y(s)] \;=\; 0$$

para algún $A(s)$ y $B(s)$.

Solución. a) Tenemos

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(-p^2y(t))(s) &= -p^2Y(s)\,,\\
\mathcal{L}(t^2y(t))(s) &= Y''(s)\,,\\
\mathcal{L}(ty'(t))(s) &= \tfrac{d}{ds}(-\mathcal{L}(y'(t))(s)) = -\tfrac{d}{ds}(sY(s) - y(0)) = -Y(s) - sY'(s)\,,\\
\mathcal{L}(t^2y''(t))(s) &= \tfrac{d^2}{ds^2}(\mathcal{L}(y''(t))(s)) = \tfrac{d^2}{ds^2}(s^2Y(s) - sy(0) - y'(0))\\
&= 2Y(s) + 4sY'(s) + s^2Y''(s)\,.
\end{aligned}$$

Aplicando transformada de Laplace a nuestra ecuación obtenemos

$$\mathcal{L}(t^2y''(t))(s) + \mathcal{L}(ty'(t))(s) + \mathcal{L}(t^2y(t))(s) + \mathcal{L}(-p^2y(t))(s) \;=\; 0\,,$$

y reemplazando se tiene

$$2Y(s) + 4sY'(s) + s^2Y''(s) - Y(s) - sY'(s) + Y''(s) - p^2Y(s) \;=\; 0\,,$$

es decir

$$(1+s^2)Y''(s) + 3sY'(s) + (1-p^2)Y(s) \;=\; 0\,.$$

b) Poniendo $p = 0$ obtenemos la ecuación

$$(1+s^2)Y''(s) + 3sY'(s) + Y(s) \;=\; 0\,,$$

que podemos escribir de la forma

$$\frac{d}{ds}[(1+s^2)Y'(s) + sY(s)] \;=\; 0\,.$$

Integrando esta última ecuación tenemos

$$(1+s^2)Y'(s) + sY(s) \;=\; c_1\,,$$

que es una ecuación diferencial lineal de primer orden. La correspondiente ecuación homogénea es

$$\frac{Y'(s)}{Y(s)} \;=\; -\frac{s}{1+s^2}$$

que tiene solución

$$Y_h(s) \;=\; \frac{c}{\sqrt{1+s^2}}\,.$$

Haciendo variar la constante $c = c(s)$ y reemplazando obtenemos

$$c'(s) \;=\; \frac{c_1}{\sqrt{1+s^2}}\,,$$

lo que implica

$$\begin{aligned} c(s) \;&=\; c_1 \int \frac{ds}{\sqrt{1+s^2}} \;+\; c_2 \\ &=\; c_1 \ln(s + \sqrt{1+s^2}) + c_2\,. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$Y(s) \;=\; c_1 \frac{\ln(s+\sqrt{1+s^2})}{\sqrt{1+s^2}} + \frac{c_2}{\sqrt{1+s^2}}\,.$$

Ejercicio 7.9.4. Resuelva usando transformada de Laplace la ecuación

$$y'' \;+\; 4y \;=\; f(t)\,, \quad y(0) \;=\; y'(0) \;=\; 0\,,$$

donde

$$f(t) \;=\; \begin{cases} 0 & 0 \le t < 3 \\ t & t \ge 3 \end{cases}$$

Solución. Primero observemos que

$$f(t) \;=\; tH(t-3) \;=\; (t-3)H(t-3) \;+\; 3H(t-3)\,,$$

donde

$$H(t) \;=\; \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t \ge 0\,. \end{cases}$$

Entonces si $Y(s) \;=\; \mathcal{L}(y(t))(s)$, aplicando transformada de Laplace a la ecuación diferencial obtenemos

$$(s^2 \;+4)\,Y(s) \;=\; \frac{3s+1}{s^2}\,e^{-3s}\,.$$

Esto implica

$$Y(s) \;=\; \frac{3s+1}{s^2(s^2\;+4)}\,e^{-3s}\,,$$

y luego

$$y(t) \;=\; \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{3s+1}{s^2(s^2\;+4)}\,e^{-3s}\right)(t)\,.$$

Escribiendo

$$\frac{3s+1}{s^2(s^2\;+4)} \;=\; \frac{A}{s} \;+\; \frac{B}{s^2} \;+\; \frac{Cs+D}{s^2+4}\,,$$

se obtiene

$$A \;=\; \frac{3}{4}\,, \quad B \;=\; \frac{1}{4}\,, \quad C \;=\; -\frac{3}{4}\,, \quad D \;=\; -\frac{1}{4}\,.$$

Así

$$\frac{3s+1}{s^2(s^2\;+4)} \;=\; \frac{3}{4}\frac{1}{s} \;+\; \frac{1}{4}\frac{1}{s^2} \;-\; \frac{3}{4}\frac{s}{s^2+4} \;-\; \frac{1}{4}\frac{1}{s^2+4}\,,$$

y

$$g(t) \;=\; \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{3s+1}{s^2(s^2\;+4)}\right)(t) \;=\; \frac{3}{4} \;+\; \frac{1}{4}\,t \;-\; \frac{3}{4}\cos(2t) \;-\; \frac{1}{8}\sin(2t)\,.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} y(t) \;&=\; g(t-3)\,H(t-3) \\ &=\; \left(\frac{3}{4} \;+\; \frac{1}{4}(t-3) \;-\; \frac{3}{4}\cos(2(t-3)) \;-\; \frac{1}{8}\sin(2(t-3))\right) H(t-3)\,. \end{aligned}$$

Ejercicio 7.9.5. Resuelva usando transformada de Laplace la ecuación

$$y'' \;+\; ty' \;-\; y \;=\; 0\,, \quad y(0) \;=\; 0\,, \quad y'(0) \;=\; 1\,.$$

Solución. Sea $Y(s) \;=\; \mathcal{L}(y(t))(s)$. Entonces

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(ty'(t))(s) \;&=\; -\frac{d}{ds}\mathcal{L}(y'(t))(s) \;=\; -\frac{d}{ds}[sY(s)-y(0)] \;=\; -Y(s) \;-\; sY'(s) \\ \mathcal{L}(y''(t))(s) \;&=\; s^2Y(s) \;-\; sy(0) \;-\; y'(0) \;=\; s^2Y(s) \;-\; 1\,. \end{aligned}$$

Luego, aplicando transformada de Laplace a nuestra ecuación obtenemos

$$s^2Y(s) \;-\; 1 \;-\; Y(s) \;-\; sY'(s) \;-\; Y(s) \;=\; 0\,,$$

es decir la ecuación lineal de primer orden

$$Y'(s) \;+\; \left(\frac{2}{s} - s\right) Y(s) \;=\; -\frac{1}{s}\,.$$

Su solución es

$$\begin{aligned}
Y(s) &= e^{-\int\left(\frac{2}{s}-s\right)ds}\left(-\int e^{\int\left(\frac{2}{s}-s\right)ds}\,\frac{1}{s}\,ds\,+\,c\right)\\
&= e^{-\left(\ln(s^2)-\frac{s^2}{2}\right)}\left(-\int e^{\ln(s^2)-\frac{s^2}{2}}\,\frac{1}{s}\,ds\,+\,c\right)\\
&= \frac{1}{s^2}e^{\frac{s^2}{2}}\left(-\int s^2e^{-\frac{s^2}{2}}\frac{1}{s}\,ds\,+\,c\right)\\
&= \frac{1}{s^2}e^{\frac{s^2}{2}}\left(\int -se^{-\frac{s^2}{2}}\,ds\,+\,c\right)\\
&= \frac{1}{s^2}e^{\frac{s^2}{2}}\left(e^{-\frac{s^2}{2}}\,+\,c\right)\\
&= \frac{1}{s^2}\,+\,\frac{c}{s^2}\,e^{\frac{s^2}{2}}\,.
\end{aligned}$$

Finalmente como

$$\lim_{s\to\infty}\mathcal{L}(y(t))(s)\;=\;0\quad\text{y}\quad\lim_{s\to\infty}\frac{1}{s^2}\,e^{\frac{s^2}{2}}\;=\;\infty\,,$$

debemos tener $c\;=\;0$. Así

$$Y(s)\;=\;\frac{1}{s^2}\,,$$

y por lo tanto

$$y(t)\;=\;\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2}\right)(t)\;=\;t\,.$$

Ejercicio 7.9.6. a) Demuestre que

$$\frac{d}{dx}\,J_0(x)\;=\;-J_1(x)\,.$$

b) Sabiendo que

$$\mathcal{L}(J_0(x))(s)\;=\;\frac{1}{\sqrt{s^2\,+\,1}}\,,$$

usando transformada de Laplace demuestre que

$$(J_0*J_1)(x)\;=\;J_0(x)\;-\;\cos(x)\,.$$

Solución. a) Como

$$J_0(x)\;=\;\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(k!)^2}\,\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}\,,$$

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dx}J_0(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^2}\; 2k\; \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-1}\; \frac{1}{2} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\;(k-1)!}\; \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-1} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(k+1)!\;k!}\; \left(\frac{x}{2}\right)^{2(k+1)-1} \\
&= -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k+1)!\;k!}\; \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+1} \\
&= -J_1(x)\;.
\end{aligned}
$$

b) Tenemos

$$
\mathcal{L}((J_0 * J_1)(x))(s) \;=\; \frac{1}{\sqrt{s^2\,+\,1}}\;\mathcal{L}(J_1(x))(s)\;.
$$

Pero

$$
J_1 \;=\; -J_0{}' \quad\Longrightarrow\quad
\begin{aligned}
\mathcal{L}(J_1(x))(s) &= -[s\mathcal{L}(J_0(x))(s)\;-\;J_0(0)] \\
&= \tfrac{-s}{\sqrt{s^2\,+\,1}}\;+\;1\;.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}((J_0 * J_1)(x))(s) &= \frac{1}{\sqrt{s^2\,+\,1}}\left(1\;-\;\frac{s}{\sqrt{s^2\,+\,1}}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{s^2\,+\,1}}\;-\;\frac{s}{s^2\,+\,1}\;,
\end{aligned}
$$

lo que implica

$$
\begin{aligned}
(J_0 * J_1)(x) &= \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{s^2\,+\,1}}\right)(x)\;-\;\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{\sqrt{s^2\,+\,1}}\right)(x) \\
&= J_0(x)\;-\;\cos(x)\;.
\end{aligned}
$$