Capítulo 1

Preliminares

1.1 Introducción

Ecuaciones diferenciales son igualdades que envuelven derivadas de funciones desconocidas. Por ejemplo:

$$y' + xy = 3 \tag{1.1}$$

$$y'' + 5y' + 6y = \cos(x) \tag{1.2}$$

$$L\frac{d^2 i}{dt^2} + R\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}i = E\omega\cos(\omega t) \tag{1.3}$$

$$(x^2 + y^2)dx - 2xydy = 0 \tag{1.4}$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0 \tag{1.5}$$

Cuando una ecuación envuelve una o más derivadas con respecto a una variable particular, esa variable es llamada **variable independiente**. Una variable es llamada **dependiente** si en la ecuación hay alguna derivada de esa variable.

En las ecuaciones (1.1) y (1.2) la variable dependiente es y y hay una única variable independiente que es x. En la ecuación (1.3) la variable dependiente es i y t es la variable independiente. L, R, C, E, y ω son constantes llamadas parámetros. La ecuación (1.5) tiene una variable dependiente V y dos variables independientes x e y.

Como la ecuación (1.4) puede ser escrita

$$x^2 + y^2 - 2xy\frac{dy}{dx} = 0$$

o

$$(x^2 + y^2)\frac{dx}{dy} - 2xy = 0\,,$$

podemos considerar cualquiera de las variables como dependiente, pasando a ser la otra independiente.

En las ecuaciones (1.1)-(1.4), tenemos solo una variable independiente y por lo tanto todas las derivadas que aparecen son ordinarias. Tales ecuaciones reciben el nombre de **ecuaciones diferenciales ordinarias**. Cuando la variable dependiente depende de más de una variable independiente, como en la ecuación (1.5), la ecuación se llama **ecuación diferencial parcial**.

Los primeros capítulos de este libro estarán dedicados al estudio de ecuaciones diferenciales ordinarias, abordándose el tema de las ecuaciones diferenciales parciales en la última parte.

Se define el **orden** de una ecuación diferencial como la derivada de mayor orden que aparece en la ecuación. Por ejemplo,

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 2b(\frac{dy}{dx})^3 + y = 0 \tag{1.6}$$

es una ecuación de *orden dos*. A estas ecuaciones también se las conoce como *ecuaciones de segundo orden*. También son de orden dos las ecuaciones (1.2),(1.3) y (1.5), en tanto que las ecuaciones (1.1) y (1.4) son de primer orden.

1.2 Generalidades sobre ecuaciones diferenciales ordinarias

En general, la ecuación

$$F(x, y, y', \cdots, y^{(n)}) = 0 \tag{1.7}$$

es llamada ecuación diferencial ordinaria de *enésimo orden*. Bajo restricciones convenientes sobre la función F, la ecuación (1.7) puede resolverse explícitamente para $y^{(n)}$ en término de las otras $n+1$ variables $x, y, y', \cdots, y^{(n-1)}$, obteniéndose

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \cdots, y^{(n-1)})\,. \tag{1.8}$$

Para los propósitos de este libro asumiremos que esto es siempre posible. Sin embargo, hay que tener en cuenta que una ecuación de la forma (1.7) puede representar más de una ecuación de la forma (1.8).

Por ejemplo, la ecuación

$$x(y')^2 + 4y' - 6x^2 = 0$$

representa dos ecuaciones diferentes,

$$y' = \frac{-2 + \sqrt{4 + 6x^3}}{x} \quad o \quad y' = \frac{-2 - \sqrt{4 + 6x^3}}{x}\,.$$

Una función ϕ definida sobre un intervalo I, es llamada una **solución** de la ecuación diferencial (1.8) si para todo $x \in I$, ϕ es derivable hasta el enésimo orden y se tiene

$$\phi^{(n)}(x) = f(x, \phi(x), \phi'(x), \cdots, \phi^{(n-1)}(x))\,.$$

Por ejemplo, verifiquemos que

$$y = e^{2x}$$

es una solución de la ecuación

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} - 6y = 0\,. \tag{1.9}$$

Sustituyendo nuestro candidato a solución en el miembro izquierdo de la ecuación (1.9) obtenemos

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} - 6y = 4e^{2x} + 2e^{2x} - 6e^{2x} \equiv 0\,,$$

lo que completa la verificación.

Un concepto importante es el de linealidad o no-linealidad de una ecuación diferencial. La ecuación

$$F(x, y, y', \cdots, y^{(n)}) = 0$$

es llamada **lineal** si la función F es una función lineal de las variables $y, y', \cdots, y^{(n)}$. Así, por ejemplo, una ecuación lineal de orden n puede ser escrita de la forma

$$b_0(x)\frac{d^ny}{dx^n} + b_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + b_{n-1}(x)\frac{dy}{dx} + b_n(x)y = R(x)\,. \tag{1.10}$$

Con este concepto la ecuación (1.6) anterior es no-lineal, y la ecuación (1.9) es lineal. La ecuación

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 4x^3$$

es también lineal. La forma en que la variable independiente entra en la ecuación no tiene nada que ver con la propiedad de linealidad.

1.3 Motivación

Las ecuaciones diferenciales aparecen frecuentemente en modelos matemáticos que tratan de describir situaciones de la vida real. Muchas leyes naturales y hipótesis pueden ser traducidas vía el lenguaje matemático en ecuaciones que envuelven derivadas. Por ejemplo, derivadas aparecen en física como velocidades y aceleraciones, en geometría como pendientes, en biología como razón de crecimiento de poblaciones, en sicología como razón de aprendizaje, en química como rapidez de reacción, en economía como razón de cambio del costo de vida, y en finanzas como razón de crecimiento de inversiones.

En diversos modelos matemáticos, para obtener una ecuación diferencial que describa un problema real, se asume que la situación es gobernada por leyes muy simples. Una vez que el modelo es construído en la forma de una ecuación diferencial, la siguiente etapa es resolver la ecuación diferencial y utilizar la solución para hacer predicciones relativas al comportamiento del problema real. En el caso que estas predicciones no concuerden razonablemente con la realidad, se debe reconsiderar los supuestos iniciales para obtener un modelo más cercano con la realidad. En muchos casos la modelación de un fenómeno conduce a ecuaciones diferenciales que no se resuelven con la teoría conocida y constituyen motivación para muchos desarrollos matemáticos. En la práctica y, a fin de atacar el problema propuesto, se hacen algunas simplificaciones y modificaciones al modelo para resolverlo de manera exacta o aproximada con la teoría conocida.

Si la función $y = y(x)$ representa una cantidad desconocida que queremos estudiar, del cálculo sabemos que la primera derivada $y' = \frac{dy}{dx}$ representa la razón de cambio de y por unidad que cambia x. Si por ejemplo se conoce esta razón de cambio (digamos por experiencia o por alguna ley física) y se sabe que es igual a una función $f(x, y)$, entonces la cantidad y satisface la ecuación diferencial ordinaria de primer orden $y' = f(x, y)$. De idéntica manera pueden plantearse ecuaciones de orden superior. A continuación daremos algunos ejemplos específicos donde aparecen ecuaciones de primer y segundo orden. Algunos de ellos serán analizados con más detalle en capítulos posteriores.

Biología. Se ha observado que para un gran tipo de colonias de bacterias estas tienden a crecer en una razón proporcional al número de bacterias presentes. Para tales colonias, sea $N = N(t)$ el número de bacterias presentes en cualquier instante t. Entonces, si k es la constante de proporcionalidad, la función $N = N(t)$ satisface la ecuación ordinaria de primer orden

$$\dot{N} = kN \tag{1.11}$$

Esta ecuación es llamada *ley de Malthus* para el crecimiento de poblaciones. T. R. Malthus observó, en 1798, que la población de Europa parecía duplicarse en intervalos regulares de tiempo, y así concluyó que la razón en que la población crece es proporcional a la población presente. Notemos que la función $N(t)$ toma solo valores enteros y luego no es continua y menos diferenciable. Sin embargo, si el número de bacterias es muy grande, podemos asumir que puede ser aproximada por una función diferenciable $N(t)$, ya que los cambios en el tamaño de la población ocurren sobre pequeños intervalos de tiempo. Más adelante estableceremos que su solución es $N(t) = N(0)e^{kt}$, donde $N(0)$ es el número de bacterias presentes inicialmente, es decir, cuando $t = 0$. La solución $N(t)$ puede ser representada gráficamente como en la Figura 1.1.

Habría que enfatizar que la ecuación (1.11) es un modelo matemático que describe una colonia de bacterias que crece de acuerdo a una ley muy simple, quizás demasiado simple, obteniéndose de esta manera una ecuación diferencial muy simple. Claramente, un modelo más realista se obtiene tomando en cuenta algunos otros factores como crecimiento exponencial, limitaciones de alimento, etc. Por supuesto, la ecuación diferencial que se obtiene en estos casos es mucho más compleja.

Farmacología. Se sabe en farmacología que la penicilina y otras drogas administradas a pacientes desaparecen de sus cuerpos de acuerdo a la siguiente regla: Si

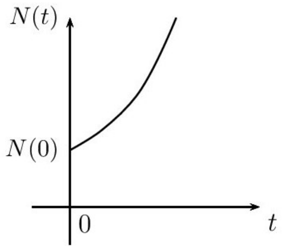

Figure 1.1: Gráfico de $N(t) = N(0)e^{kt}$

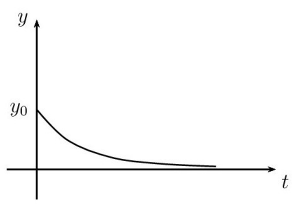

Figure 1.2: Gráfico de $y(t) = y_0e^{-kt}$

$y(t)$ es la cantidad de droga en un cuerpo humano en el instante t, entonces la razón de cambio $\dot{y}(t)$ de la droga es proporcional a la cantidad presente. Esto es, $y(t)$ satisface la ecuación diferencial

$$\dot{y} = -ky \tag{1.12}$$

donde $k > 0$ es la constante de proporcionalidad. El signo negativo en (1.12) es debido al hecho que $y(t)$ decrece cuando t crece, y luego la derivada de $y(t)$ con respecto a t es negativa. Para cada droga, la constante k es conocida experimentalmente.

La solución de la ecuación (1.12) es

$$y(t) = y_0e^{-kt}, \tag{1.13}$$

donde $y_0 = y(0)$ es la cantidad inicial de droga (dosis inicial).

Como se ve de la ecuación (1.13) (ver también Figura 1.2), la cantidad de droga en el cuerpo del paciente tiende a cero cuando $t \to \infty$. Sin embargo, en muchos casos es necesario mantener (aproximadamente) una concentración constante (y por lo tanto aproximadamente una cantidad constante) de droga en el cuerpo del paciente por largo tiempo. Para lograr esto es necesario dar al paciente una dosis inicial y_0 y luego a intervalos iguales de tiempo, digamos τ horas, dar al paciente una dosis D

de la droga. La ecuación (1.13) indica la cantidad de droga en el cuerpo del paciente en cada tiempo t; luego, es simple determinar la cantidad de dosis D. En efecto, al instante τ, y antes de administrar la dosis D, la cantidad de droga presente en el cuerpo es

$$y(\tau) = y_0 e^{-k\tau} .$$

Si queremos mantener la cantidad inicial y_0 en los tiempos $\tau, 2\tau, 3\tau, \cdots$, la dosis D, que debemos suministrar al paciente cada τ horas, debe satisfacer la ecuación

$$y_0 e^{-k\tau} + D = y_0 .$$

Luego

$$D = y_0(1 - e^{-k\tau}) .$$

Mecánica. El principio de determinación de Newton establece que el movimiento de una partícula o de un sistema de ellas depende de las posiciones y velocidades del sistema. Aplicando esto a la aceleración $\ddot{x}$ de una partícula, se tiene la ecuación

$$\ddot{x} \;=\; F(t, x, \dot{x}) , \tag{1.14}$$

que se reconoce como la **Segunda Ley de la Mecánica Newtoniana**. En ella, F es la suma de fuerzas aplicadas y en general depende del tiempo t, de la posición x y de la velocidad $\dot{x}$.

Por ejemplo, si suponemos que un cuerpo de masa m cae bajo la sola influencia de la gravitación, tenemos, considerando un sistema de referencia unidireccional orientado al centro de la tierra

$$F \;=\; m \cdot g \,, \quad g : \text{aceleración de gravedad} = \text{constante} \,, \tag{1.15}$$

donde mg: magnitud única debida a la gravedad, llamada *peso* del cuerpo.

Si $y(t)$ es la posición en que se encuentra el cuerpo en el instante t medida desde una cierta posición fija, su velocidad $v = \frac{dy}{dt}$ es la razón de cambio de posición, y su aceleración $a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2}$ es la razón de cambio de velocidad, ambas con respecto al tiempo.

Luego la ecuación (1.15) se convierte en

$$m \cdot \frac{d^2y}{dt^2} \;=\; m \cdot g \quad \Longrightarrow \quad \frac{d^2y}{dt^2} \;=\; g \,.$$

Si alteramos la situación admitiendo que el aire ejerce una fuerza de resistencia proporcional a la velocidad, tenemos

$$F \;=\; m \cdot g \;-\; k \cdot \frac{dy}{dt}$$

y la ecuación diferencial asociada es

$$m \cdot \frac{d^2y}{dt^2} \;=\; m \cdot g \;-\; k \cdot \frac{dy}{dt} \,.$$

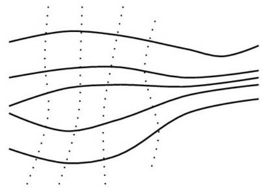

Figure 1.3: Fuidos bi-dimensionales

Trayectorias Ortogonales. Considere una familia a un parámetro de curvas dada por la ecuación

$$F(x, y) = c\,. \tag{1.16}$$

Diferenciando obtenemos

$$F_x dx + F_y dy = 0\,.$$

donde F_x y F_y son las derivadas parciales de F con respecto a x e y, respectivamente. Así,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y} \tag{1.17}$$

nos dá la pendiente de cada curva de la familia (1.16). Queremos encontrar otra familia de curvas tal que cada miembro de la nueva familia intercepte a cada miembro de la familia (1.16) en ángulo recto; es decir, queremos encontrar las **trayectorias ortogonales** de la familia (1.16). Debemos tener en cada punto, entonces,que el producto de la pendiente de la curva que pasa por ese punto de la familia (1.16) y la pendiente de la correspondiente trayectoria ortogonal debe ser igual a -1. Así, teniendo en cuenta (1.17), la solución general de la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{F_y}{F_x}\,, \tag{1.18}$$

nos dá las trayectorias ortogonales de la familia (1.16).

Hay muchas interpretaciones físicas y usos de trayectorias ortogonales:

1. En campos electrostáticos las líneas de fuerza son ortogonales a las líneas de potencial constante. Así, partiendo de las líneas de potencial se pueden encontrar las líneas de fuerza tal como indican (1.16), (1.17) y (1.18).

2. En flujos de fluidos bi-dimensionales las líneas de movimiento del flujo son ortogonales a las líneas equipontenciales del flujo (ver Figura 1.3).

3. En meteorología las trayectorias ortogonales de las *isobaras* (curvas conectando los puntos que reportan igual presión barométrica) indican la dirección del viento desde áreas de alta a baja presión.

Estas son algunas aplicaciones de ecuaciones diferenciales. Otras serán desarrolladas en detalle a lo largo del texto.