Capítulo 8

Sistemas de Ecuaciones Diferenciales de Primer Orden

En muchos problemas mecánicos, eléctricos, biológicos y de otras disciplinas, aparecen involucradas varias variables dependientes, cada una de las cuales es una función de una única variable independiente t. A continuación, como motivación, mostraremos algunos ejemplos sencillos.

8.1 Algunos ejemplos

Ejemplo 8.1.1. Considere el siguiente problema de mezcla. Dos tanques de 100 litros dispuestos como en la Figura 8.1, están inicialmente llenos de agua pura. En el instante $t = 0$ se abren simultáneamente las tres llaves. Desde una fuente externa y por la llave A, entra al tanque 1 agua que contiene sal con una concentración de 1 gramo por litro a 1 litro por segundo. El agua fluye del tanque 1 al tanque 2 por la llave B a 3 litros por segundo. En el tanque 2 el agua se evapora a una tasa de 1 litro por segundo y es bombeada de regreso al tanque 1 por la llave C a 2 litros por segundo. Determinemos las ecuaciones diferenciales que describen el proceso.

Sean $x(t)$ y $y(t)$ la cantidad de gramos de sal en el tanque 1 y en el tanque 2, respectivamente, en el instante t. Primero observemos que el volumen en ambos tanques es constante igual a 100 litros. La razón de entrada y de salida de solución del tanque 1 es

$$e_1(t) \;=\; 1 + \frac{2}{100}\, y(t)\,, \quad s_1(t) \;=\; \frac{3}{100}\, x(t)\,,$$

y del tanque 2

$$e_2(t) \;=\; \frac{3}{100}\, x(t)\,, \quad s_2(t) \;=\; \frac{2}{100}\, y(t)\,.$$

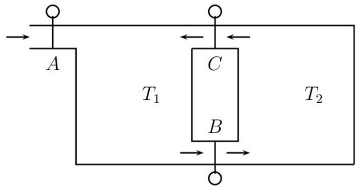

Figure 8.1: Problema de dos tanques

Luego nuestras ecuaciones son

$$\left\{\begin{array}{lcl} x'(t) & = & 1 + \frac{1}{50}\,y(t) \;-\; \frac{3}{100}\,x(t) \\ \\ y'(t) & = & \frac{3}{100}\,x(t) \;-\; \frac{1}{50}\,y(t) \end{array}\right. \tag{8.1}$$

con las condiciones iniciales

$$x(0) \;=\; y(0) \;=\; 0\,.$$

Observe que, como los lados derechos de ambas ecuaciones en 8.1 dependen de las dos funciones incognitas x e y, no podemos resolver este problema con las técnicas usadas hasta ahora. Este es un ejemplo típico de un sistema de ecuaciones lineales de primer orden, que es el tema de este capítulo. Antes de empezar formalmente mostraremos otros ejemplos donde aparecen estos sistemas.

Ejemplo 8.1.2. Hay dos masas en movimiento sobre una superficie libre de fricción pero sobre cada una de ellas actúan fuerzas externas $F_1(t)$ y $F_2(t)$ respectivamente; hay tres resortes con constantes K_1, K_2 y K_3 respectivamente como lo muestra la figura:

La ecuación del movimiento viene dada por el sistema

$$\begin{aligned} m_1\frac{dx_1}{dt} &= K_2(x_2 - x_1) - K_1x_1 + F_1(t) \\ m_2\frac{dx_2}{dt} &= K_2(x_2 - x_1) - K_3x_2 + F_2(t)\,, \end{aligned}$$

que se puede escribir de la forma

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= -\frac{K_1 + K_2}{m_1}\,x_1 + \frac{K_2}{m_1}\,x_2 + \frac{1}{m_1}\,F_1(t) \\ \frac{dx_2}{dt} &= -\frac{K_2}{m_2}\,x_1 + \frac{K_2 - K_3}{m_2}\,x_2 + \frac{1}{m_2}\,F_2(t)\,. \end{aligned}$$

Ejemplo 8.1.3. En un pueblo del sur de Chile como lo hay muchos, en los cuales aún no han llegado los hiper o mega mercados Juan tiene un Supermercado y Fernando instala otro en la misma manzana. Juan y Fernando empiezan a preocuparse sobre el efecto que cada supermercado tiene en el otro. Por un lado los supermercados juntos pueden ayudar a atraer clientes pero por otra parte compiten entre si por el limitado número de clientes. Discuten el tema hasta el cansancio y no llegan a conclusiones que los convenzan, deciden en tal caso contratar al matemático Guido para dilucidar el tema. Guido siguiendo su propia experiencia en el sentido de considerar modelos los más simples posible sugiere el siguiente sistema lineal homogéneo:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= ax + by \\ \frac{dy}{dx} &= cx + dt \end{aligned}$$

donde se definen las variables dependientes x e y de la siguiente forma

$$\begin{aligned} x(t) &= \text{ganancia diaria de la tienda de Juan en el tiempo } t\,, \\ y(t) &= \text{ganancia diaria de la tienda de Fernando en el tiempo } t\,. \end{aligned}$$

Si $x(t) > 0$, la tienda de Juan gana dinero, pero si $x(t) < 0$ la tienda pierde, lo mismo ocurre con $y(t)$ y a, b, c, d son parámetros. La razón de cambio de las ganancias de Juan dependen linealmente de sus propias ganancias y de las de Fernando, lo mismo ocurre con las ganancias de Fernando.

Podemos usar este modelo para predecir ganancias futuras siempre que conozcamos los valores de los parámetros a, b, c y d. Respecto al significado de estos parámetros podríamos entender lo siguiente: a mide el efecto de las ganancias de Juan sobre la razón de cambio $\dfrac{dx}{dt}$ de esa ganancia, tal que si $a > 0$ es porque Juan está ganando dinero, entonces $x > 0$ y por lo cual $ax > 0$, en este caso ax incide positivamente y Juan hace más dinero. Por otro lado ser lucrativo podría tener un efecto negativo sobre las ganancias de Juan (por ejemplo, no hay suficientes cajas, el local está lleno y los clientes elegirían ir a otra parte) teniendo como resultado una disminución de las ganancias y bajo esta hipótesis a sería negativo.

El parámetro b mide el efecto de las ganancias de Fernando sobre las ganancias de Juan. Si $b > 0$ y Fernando tiene ganancias ($y > 0$), entonces las ganancias de Juan también se benefician porque by contribuye positivamente a $\dfrac{dx}{dt}$. De otra manera, si $b < 0$ entonces cuando Fernando obtiene utilidades ($y > 0$), Juan pierde, lo cual podría interpretarse como la medida en que Fernando quita clientes a Juan.

Similarmente, las ganancias de Juan y Fernando afectan la razón de cambio de las ganancias de Fernando y los parámetros c y d tienen interpretaciones similares. Este modelo no considera otras variables, supone que sólo las ganancias de las dos tiendas influyen en el cambio que experimentan.

A pesar de las limitaciones que impone estas hipótesis tan simplificadas, el modelo permite visualizar e interpretar de manera sencilla las soluciones.

Si $a = d = 0, b = 1$ y $c = 1$ el sistema es:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y \\ \frac{dy}{dt} &= -x \end{aligned}$$

el cual tiene las soluciones $x(t) = c_1 \operatorname{sen} t$, $y(t) = c_2 \cos t$. Si tomamos $c_1 = c_2 = 2$ las gráficas son:

Este modelo según se puede observar en el gráfico significa que las ganancias de Juan y Fernando oscilan periódicamente entre ganar y perder dinero.

Si $a = -1, b = 4, c = -3$ y $d = -1$, el sistema es

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -x + 4y \\ \frac{dy}{dt} &= -3x - y \end{aligned}$$

En este caso las ganancias de Juan tienen un efecto negativo sobre la propia variación de ganancia e influyendo negativamente el triple en la ganancia de Fernando. Sin embargo la ganancia de Fernando incluye positivamente sobre la ganancia de Juan pero negativamente sobre su propia ganancia. La situación se puede visualizar en el siguiente gráfico:

8.2 Preliminares

La forma más general de un sistema de ecuaciones de primer orden es el siguiente

$$\begin{aligned} x_1' &= f_1(t, x_1, x_2, \cdots, x_n) \\ x_2' &= f_2(t, x_1, x_2, \cdots, x_n) \\ &\vdots \\ x_n' &= f_n(t, x_1, x_2, \cdots, x_n)\,, \end{aligned} \tag{8.2}$$

donde se supone por lo menos que las funciones $f_i(t, x_1, x_2, \cdots, x_n)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, son continuas en todas sus variables, en el subconjunto Λ del espacio $t, x_1, x_2, \cdots, x_n$ donde estamos trabajando.
Para notar la similitud entre ecuaciones de primer orden y sistemas de ecuaciones de primer orden, observe que si consideramos la función $F : \Lambda \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definida por

$$F(t, x) = (f_1(t, x), \ldots, f_n(t, x)), \quad x = (x_1, x_2, \cdots, x_n),$$

entonces el sistema 8.2 se escribe en forma vectorial como

$$x' = F(t, x), \tag{8.3}$$

donde $x' = (x'_1, \ldots, x'_n)$.

Definición 8.2.1. *Una solución del sistema 8.2 o de la ecuación vectorial 8.3 consiste en una función diferenciable $u : I \to \mathbb{R}^n$ definida sobre un intervalo abierto I de la recta real, de la forma $u(t) = (\phi_1(t), \ldots, \phi_n(t))$, tal que para todo $t \in I$ se tiene*

a) $(t, u(t)) = (t, \phi_1(t), \ldots, \phi_n(t)) \in \Lambda$, *y*

b) $u'(t) = F(t, u(t))$, *es decir,* $\phi'_i(t) = f_i(t, \phi_1(t), \ldots, \phi_n(t))$ *para todo* $i = 1, 2, \ldots, n$.

El correspondiente teorema de existencia y unicidad de soluciones es el siguiente.

Teorema 8.2.2. *Suponga las funciones $f_1, f_2, \cdots, f_n$ y sus derivadas parciales de primer orden*

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1}, \frac{\partial f_1}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial f_1}{\partial x_n}, \cdots, \frac{\partial f_n}{\partial x_1}, \frac{\partial f_n}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial f_n}{\partial x_n},$$

son funciones continuas en un rectángulo abierto R del espacio de puntos $(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Si $(t_0, a_1, a_2, \ldots, a_n)$ es un punto de R, entonces existe un intervalo $]t_0 + \delta, t_0 - \delta[$ con $\delta > 0$ y una única solución $x_1 = \phi_1(t), \ldots, x_n = \phi_n(t)$ del sistema 8.2 que satisface las condiciones iniciales: $\phi_1(t_0) = a_1, \ldots, \phi_n(t_0) = a_n$.

La demostración de este teorema se puede construir generalizando los argumentos que usan para la demostración del teorema 2.4.1.

Observación 8.2.3. *Toda ecuación de orden n*

$$y^{(n)} = f(t, y, y', \cdots, y^{(n-1)}), \tag{8.4}$$

se puede escribir como un sistema de ecuaciones de primer orden.

En efecto, si ponemos

$$x_1 = y,\ x_2 = y',\ \ldots, x_n = y^{(n-1)}, \tag{8.5}$$

la ecuación 8.4 es equivalente al sistema

$$\begin{aligned} x_1' &= x_2 \\ x_2' &= x_3 \\ &\vdots \\ x_n' &= f(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)\,. \end{aligned} \tag{8.6}$$

Que la ecuación 8.4 sea equivalente al sistema 8.6 quiere decir lo siguiente: si $y(t)$ es solución de 8.4, entonces $u(t) = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t))$ definida por 8.5 es solución del sistema 8.6; y recíprocamente, si $u(t) = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t))$ es solución del sistema 8.6, entonces $y(t) = x_1(t)$ es solución de 8.4.
En particular una ecuación lineal de orden n

$$\frac{d^n y}{dt^n} + b_1(t)\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} + \cdots + b_{n-1}(t)\frac{dy}{dt} + b_n(t)y = g(t)\,, \tag{8.7}$$

es equivalente al sistema

$$\begin{aligned} x_1' &= x_2 \\ x_2' &= x_3 \\ &\vdots \\ x_n' &= -b_1(t)\,x_n - \cdots - b_{n-1}(t)\,x_2 - b_n(t)\,x_1 + g(t). \end{aligned} \tag{8.8}$$

De esta forma todos los resultados que obtengamos para sistemas de ecuaciones de primer orden tienen su equivalente, via 8.5, para ecuaciones de orden n.

8.3 Sistemas lineales

En el resto de este capítulo nos concentraremos en sistemas lineales, es decir en sistemas de la forma

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + \cdots + a_{1n}(t)x_n + f_1(t) \\ \frac{dx_2}{dt} &= a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + \cdots + a_{2n}(t)x_n + f_2(t) \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 + \cdots + a_{nn}(t)x_n + f_n(t) \end{aligned} \tag{8.9}$$

donde las funciones $a_{ij}(t)$ y $f_i(t)$, $i, j = 1, \ldots, n$ son continuas en un cierto intervalo abierto I del eje t. Si $f_i(t)$ es idénticamente cero en I para todo $i = 1, \ldots, n$, el sistema 8.9 se llama **homogéneo**; en caso contrario, se dice que es

no-homogéneo. Una solución de 8.9 en I es, claro está, una función diferenciable $u(t) = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t))$, donde $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)$ satisfacen las ecuaciones 8.9 sobre ese intervalo.
Así por ejemplo, es fácil verificar que el sistema lineal homogéneo (con coeficientes constantes)

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 4x - y \\ \frac{dy}{dt} &= 2x + y \end{aligned} \tag{8.10}$$

admite a

$$u(t) = (e^{3t}, e^{3t})\,, \quad \text{y a} \quad v(t) = (e^{2t}, 2e^{2t})\,,$$

como soluciones sobre cualquier intervalo abierto.

Damos acontinuación un breve esbozo de la teoría general de sistemas lineales de la forma 8.9 que es muy similar a la de las ecuaciones lineales de segundo orden. Comenzamos enunciando el correspondiente teorema de existencia y unicidad de soluciones.

Sean entonces $a_{i,j}, f_i : I \to \mathbb{R}$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$, funciones continuas definidas en un intervalo abierto I del eje t. Entonces el sistema 8.9 está definido en el rectángulo abierto $R = I \times \mathbb{R}^n$ y verifica las condiciones del Teorema 8.2.2, luego dado $(t_0, p_1, p_2, \ldots, p_n) \in R$, existe un pequeño intervalo abierto J centrado en t_0 y una única solución $u : J \to \mathbb{R}^n$ del sistema que verifica $u(t_0) = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$. Como el sistema es lineal, tal como en el caso de ecuaciones lineales, se tiene que la solución u está definida en todo el intervalo I. Mas precisamente

Teorema 8.3.1. *Bajo las condiciones anteriores, dado* $(t_0, p_1, p_2, \ldots, p_n) \in I \times \mathbb{R}^n$ *existe una única solución* $u : I \to \mathbb{R}^n$ *del sistema 8.9 que verifica* $u(t_0) = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$.

Observación 8.3.2. Si consideramos las matrices

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}, \; A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \cdots & a_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{pmatrix} \text{ y } f(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix},$$

el sistema 8.9 se puede escribir matricialmente de la forma

$$x'(t) = A(t)\,x(t) + f(t)\,, \tag{8.11}$$

donde

$$x'(t) = \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) \end{pmatrix}.$$

Así $u(t) = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t))$ es solución del sistema 8.9 sí y sólo sí la matriz

$$u(t) \;=\; \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$$

es solución del sistema matricial 8.11.

8.3.1 Solución general

Consideremos primero el sistema lineal homogéneo

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + \cdots + a_{1n}(t)x_n \\ \frac{dx_2}{dt} &= a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + \cdots + a_{2n}(t)x_n \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 + \cdots + a_{nn}(t)x_n \end{aligned} \tag{8.12}$$

donde las funciones $a_{ij} : I \to \mathbb{R}$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$, son continuas en un intervalo abierto I. Usando las notaciones de la Observación 8.3.2, esto es lo mismo que considerar la ecuación matricial

$$x'(t) \;=\; A(t)\, x(t)\,. \tag{8.13}$$

Los siguientes resultados son similares a los que se obtienen para ecuaciones lineales de segundo orden.

Teorema 8.3.3. *Si* $u(t)$ *es solución de 8.12 y existe* $t_0 \in I$ *tal que* $u(t_0) = (0, 0, \ldots, 0)$*, entonces* $u(t) = (0, 0, \ldots, 0)$ *para todo* $t \in I$*.*

Demostración. Como la función $v : I \to \mathbb{R}^n$ definida por $v(t) = (0, 0, \ldots, 0)$ para todo $t \in I$, es claramente solución de 8.12 y coincide con u en el punto t_0, el resultado es consecuencia del Teorema 8.3.1.

Teorema 8.3.4. *Consideremos dos soluciones* $u_1(t) = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t))$ *y* $u_2(t) = (y_1(t), y_2(t), \ldots, y_n(t))$ *del sistema 8.12. Entonces, para todo par de constantes reales* c, d*, la función* $u(t) = c\, u_1(t) \;+\; d\, u_2(t)$ *es solución de 8.12.*

Demostración. Usando la notación matricial

$$u_1(t) \;=\; \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}, \quad u_2(t) \;=\; \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix},$$

si $u(t) = c\,u_1(t) + d\,u_2(t)$, tenemos

$$\begin{aligned} u'(t) &= c\,u_1'(t) + d\,u_2'(t) = c\,A(t)\,u_1(t) + d\,A(t)\,u_2(t) \\ &= A(t)\,(c\,u_1(t) + d\,u_2(t)) = A(t)\,u(t)\,. \end{aligned}$$

Teorema 8.3.5. *Suponga que el sistema 8.12 admite solución compleja* $u(t) = (x_1(t) + \imath y_1(t), x_2(t) + \imath y_2(t), \ldots, x_n(t) + \imath y_n(t))$*. Entonces la parte real* $u_1(t) = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t))$ *y la parte imaginaria* $u_2(t) = (y_1(t), y_2(t), \ldots, y_n(t))$ *son soluciones reales de 8.12.*

Demostración. Usemos la notación matricial

$$u(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) + \imath y_1(t) \\ x_2(t) + \imath y_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) + \imath y_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} + \imath \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix} = u_1(t) + \imath\, u_2(t)\,.$$

Como $u(t) = u_1(t) + \imath u_2(t)$ es solución del sistema tenemos

$$u'(t) = A(t)\,u(t) \quad \Longrightarrow \quad u_1'(t) + \imath\, u_2'(t) = A(t)\,(u_1(t) + \imath\, u_2(t))\,.$$

Como $A(t)$ es una matriz con entradas reales, igualando partes reales y partes imaginarias se obtiene

$$u_1'(t) = A(t)\,u_1(t) \quad \text{y} \quad u_2'(t) = A(t)\,u_2(t)\,,$$

lo cual termina la demostración.

A cada conjunto de n de funciones $u_1, u_2, \ldots, u_n : I \to \mathbb{R}^n$ que son soluciones del sistema homogéneo 8.12 y a cada $t \in I$, podemos asociar el determinante

$$W(t) = \begin{vmatrix} x_{11}(t) & x_{12}(t) & \cdots & x_{1n}(t) \\ x_{21}(t) & x_{22}(t) & \cdots & x_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1}(t) & x_{n2}(t) & \cdots & x_{nn}(t) \end{vmatrix}\,,$$

donde $u_i(t) = (x_{1i}(t), x_{2i}(t), \ldots, x_{ni})$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Este determinante se denomina **wronskiano** de las soluciones $u_1, u_2, \ldots, u_n$ en t.

Recuerde que n funciones $u_1, u_2, \ldots, u_n : I \to \mathbb{R}^n$ se dicen **linealmente dependientes en** I, si existen constantes $c_1, c_2, \ldots, c_n$, no todas nulas, tales que $c_1\,u_1(t) + c_2\,u_2(t) + \ldots + c_n\,u_n(t) = 0$ para todo $t \in I$. Si esto no es cierto, se dice que $u_1, u_2, \ldots, u_n$ son **linealmente independientes en** I.

Teorema 8.3.6. *Sean* $u_1, u_2, \ldots, u_n : I \to \mathbb{R}^n$ *soluciones de 8.12. Entonces* $u_1, u_2, \ldots, u_n$ *son linealmente independientes en* I *sí y sólo sí el correspondiente wronskiano* $W(t)$ *es no nulo en todo punto de* I.

Demostración. Supongamos que $u_1, u_2, \ldots, u_n : I \to \mathbb{R}^n$ son soluciones linealmente independientes de 8.12 y que existe $t_0 \in I$ tal que $W(t_0) = 0$. Entonces existen constante $c_1, c_2, \ldots, c_n$, no todas nulas, tales que $c_1\, u_1(t_0) + c_2\, u_2(t_0) + \ldots + c_n\, u_n(t_0) = (0, 0, \ldots, 0)$. Como $v(t) = c_1\, u_1(t) + c_2\, u_2(t) + \ldots + c_n\, u_n(t)$ (Teorema 8.3.4) es también solución de 8.12 y se verifica $v(t_0) = (0, 0, \ldots, 0)$, tenemos que $v(t) = (0, 0, \ldots, 0)$ para todo $t \in I$ (Teorema 8.3.3). Esto contradice que $u_1, u_2, \ldots, u_n$ sean linealmente independientes. Luego $W(t) \neq 0$ para todo $t \in I$.
Recíprocamente, es claro que si n soluciones $u_1, u_2, \ldots, u_n$ de 8.12 son linealmente dependientes en I, entonces el correspondiente wronskiano $W(t)$ es nulo en todo punto de I, lo que termina la demostración.

Teorema 8.3.7. *Sean $u_1, u_2, \ldots, u_n : I \to \mathbb{R}^n$ soluciones linealmente independientes del sistema lineal homogéneo 8.12. Entonces toda solución de 8.12 es combinación lineal de $u_1, u_2, \ldots, u_n$ con coeficientes en $\mathbb{R}$.*

Demostración. Supongamos $u_i(t) = (x_{1i}(t), x_{2i}(t), \ldots, x_{ni})$, para $i = 1, 2, \ldots, n$. Sea $u : I \to \mathbb{R}^n$ solución cualquiera de 8.12. Fijado $t_0 \in I$, sea $(p_1, p_2, \ldots, p_n) = u(t_0)$. Como el wronskiano $W(t)$ de las soluciones $u_1, u_2, \ldots, u_n$ es no nulo en t_0, existen constantes $c_1, c_2, \ldots, c_n$ tales que

$$\begin{array}{rcl} c_1\, x_{11}(t_0) \ + \ c_2\, x_{21}(t_0) \ + \ \ldots \ + \ x_{n1}(t_0) & = & p_1 \\ c_1\, x_{12}(t_0) \ + \ c_2\, x_{22}(t_0) \ + \ \ldots \ + \ x_{n2}(t_0) & = & p_2 \\ \vdots & & \vdots \\ c_1\, x_{1n}(t_0) \ + \ c_2\, x_{2n}(t_0) \ + \ \ldots \ + \ x_{nn}(t_0) & = & p_n \end{array}$$

Luego $v(t) = c_1\, u_1(t) + c_2\, u_2(t) + \ldots + c_n\, u_n(t)$ es solución de 8.12 que verifica $v(t_0) = (p_1, p_2, \ldots, p_n) = u(t_0)$. Por lo tanto, $u(t) = v(t)$ para todo $t \in I$ y u es combinación lineal de $u_1, u_2, \ldots, u_n$.

Definición 8.3.8. *Sean $u_1, u_2, \ldots, u_n : I \to \mathbb{R}^n$ soluciones linealmente independientes del sistema lineal homogéneo 8.12 y suponga $u_i(t) = (x_{1i}(t), x_{2i}(t), \ldots, x_{ni})$, para $i = 1, 2, \ldots, n$. La matriz $n \times n$*

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} x_{11}(t) & x_{12}(t) & \cdots & x_{1n}(t) \\ x_{21}(t) & x_{22}(t) & \cdots & x_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1}(t) & x_{n2}(t) & \cdots & x_{nn}(t) \end{pmatrix}$$

cuya $i-$eśima columna está formada por las componentes de la solución $u_j(t)$, es llamada **matriz fundamental** *del sistema lineal homogéneo 8.12.*

Observación 8.3.9. Observe que el wronskiano $W(t)$ de las soluciones $u_1, \ldots, u_n$ es el determinante de la matriz fundamental $\Phi(t)$ y que la solución general del sistema lineal homogéneo 8.12 es

$$u(t) = \Phi(t)\, c\,, \quad \text{con} \quad c = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}.$$

Observe además que se tiene

$$\Phi'(t) \;=\; A(t)\,\Phi(t)\,,$$

por lo que la matriz fundamental $\Phi(t)$ es solución de la ecuación matricial

$$X'(t) \;=\; A(t)\,X(t)\,,$$

donde $X(t)$ es matriz $n \times n$ para cada $t \in I$.

Ejemplo 8.3.10. Para la ecuación

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 4x - y \\ \frac{dy}{dt} &= 2x + y \end{aligned} \tag{8.14}$$

verificamos que las funciones $u(t) = (e^{3t}, e^{3t})$ y $v(t) = (e^{2t}, 2e^{2t})$ son soluciones. Como el correspondiente wronskiano

$$W(t) \;=\; \begin{vmatrix} e^{3t} & e^{2t} \\ e^{3t} & 2\,e^{2t} \end{vmatrix} \;=\; e^{3t}\,e^{2t}$$

es distinto de cero, la solución general es

$$u(t) \;=\; (c_1\,e^{3t} \;+\; c_2\,e^{2t}, c_1\,e^{3t} \;+\; 2\,c_2\,e^{2t})\,,$$

o bien

$$u(t) \;=\; \begin{pmatrix} e^{3t} & e^{2t} \\ e^{3t} & 2\,e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}\,.$$

Considere ahora el sistema lineal no-homogéneo

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + \cdots + a_{1n}(t)x_n + f_1(t) \\ \frac{dx_2}{dt} &= a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + \cdots + a_{2n}(t)x_n + f_2(t) \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 + \cdots + a_{nn}(t)x_n + f_n(t) \end{aligned} \tag{8.15}$$

donde las funciones $a_{ij}(t)$ y $f_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ son continuas en un cierto intervalo abierto I del eje t. Tenemos entonces el siguiente resultado.

Teorema 8.3.11. *Suponga que $u_1, u_2, \ldots, u_n : I \to \mathbb{R}^n$ son soluciones linealmente independientes del correspondiente sistema homogéneo 8.12, y que $v : I \to \mathbb{R}^n$ es una solución del sistema no-homogéneo 8.15. Entonces para toda solución $w : I \to \mathbb{R}^n$ del sistema no-homogéneo 8.15, existen constante $c_1, c_2, \ldots, c_n$ tales que $w(t) = c_1\,u_1(t) \;+\; c_2\,u_2(t) \;+\; \ldots \;+\; c_n\,u_n \;+\; v(t)$ para todo $t \in I$.*

Demostración. Como $w(t) - v(t)$ es solución del sistema homogéneo 8.12, existen constante $c_1, c_2, \ldots, c_n$ tales que $w(t) - v(t) \;=\; c_1\, u_1(t) \;+\; c_2\, u_2(t) \;+\; \ldots \;+\; c_n\, u_n$ para todo $t \in I$ (Teorema 8.3.7).

Si $u_1, u_2, \ldots, u_n : I \to \mathbb{R}^n$ son soluciones linealmente independientes del sistema homogéneo 8.12, podemos encontrar una solución particular del sistema no-homogéneo 8.15 usando el **método de variación de parámetros**. Este consiste en buscar una solución particular de la forma

$$v(t) \;=\; c_1(t)\, u_1(t) \;+\; \ldots \;+\; c_n(t)\, u_n(t)\,,$$

o en forma matricial

$$v(t) \;=\; \Phi(t) \begin{pmatrix} c_1(t) \\ \vdots \\ c_n(t) \end{pmatrix} \,,$$

donde $\Phi(t)$ es la correspondiente matriz fundamental. Entonces

$$v'(t) \;=\; \Phi'(t) \begin{pmatrix} c_1(t) \\ \vdots \\ c_n(t) \end{pmatrix} \;+\; \Phi(t) \begin{pmatrix} c_1'(t) \\ \vdots \\ c_n'(t) \end{pmatrix} \,.$$

Por otra parte

$$A(t)\, v(t) \;+\; \begin{pmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix} \;=\; A(t)\, \Phi(t) \begin{pmatrix} c_1(t) \\ \vdots \\ c_n(t) \end{pmatrix} \;+\; \begin{pmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix} \,.$$

Como $\Phi'(t) \;=\; A(t)\, \Phi(t)$, debemos tener la igualdad

$$\Phi(t) \begin{pmatrix} c_1'(t) \\ \vdots \\ c_n'(t) \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix} \,,$$

lo que implica

$$\begin{pmatrix} c_1'(t) \\ \vdots \\ c_n'(t) \end{pmatrix} \;=\; \Phi(t)^{-1} \begin{pmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix} \,.$$

Por lo tanto,debemos tener

$$\begin{pmatrix} c_1(t) \\ \vdots \\ c_n(t) \end{pmatrix} \;=\; \int \Phi(t)^{-1} \begin{pmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix} \, dt\,.$$

Ejemplo 8.3.12. Considere el sistema

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 4x - y - 5\,t \; + \; 2 \\ \frac{dy}{dt} &= 2x + y \; + \; 8\,t \; - \; 8 \end{aligned} \tag{8.16}$$

Tenemos que

$$\Phi(t) \;=\; \begin{pmatrix} e^{3t} & e^{2t} \\ e^{3t} & 2\,e^{2t} \end{pmatrix}$$

es matriz fundamental para el correspondiente sistema homogéneo. Su matriz inversa es

$$\Phi(t)^{-1} \;=\; \frac{1}{e^{3t}\,e^{2t}} \begin{pmatrix} 2\,e^{2t} & -e^{2t} \\ -e^{3t} & e^{3t} \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} 2\,e^{-3t} & -e^{-3t} \\ -e^{-2t} & e^{-2t} \end{pmatrix} .$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} c_1(t) \\ c_2(t) \end{pmatrix} \;&=\; \int \Phi(t)^{-1} \begin{pmatrix} -5\,t \; + \; 2 \\ 8\,t \; - \; 8 \end{pmatrix} dt \;=\; \int \begin{pmatrix} (12 \; - \; 18\,t)\,e^{-3t} \\ (-10 \; + \; 13\,t)\,e^{-2t} \end{pmatrix} . \\ &= \begin{pmatrix} (6\,t \; - \; 2)\,e^{-3t} \\ \frac{(7\,-\,26\,t)}{4}\,e^{-2t} \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

Luego tenemos la solución particular

$$v(t) \;=\; \Phi(t) \begin{pmatrix} c_1(t) \\ c_2(t) \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} e^{3t} & e^{2t} \\ e^{3t} & 2\,e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (6\,t \; - \; 2)\,e^{-3t} \\ \frac{(7\,-\,26\,t)}{4}\,e^{-2t} \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} \frac{-2\,t-1}{4} \\ \frac{-14\,t+3}{2} \end{pmatrix} .$$

Entonces la solución general de nuestro sistema es

$$u(t) \;=\; (\frac{-2\,t-1}{4} \;+\; c_1\,e^{3t} \;+\; c_2\,e^{2t}, \frac{-14\,t+3}{2} \;+\; c_1\,e^{3t} \;+\; 2\,c_2\,e^{2t}) .$$

8.3.2 Caso homogéneo con coeficientes constantes

Ya estamos en disposición de dar una solución completa del sistema

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} \;&=\; a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + \cdots + a_{1n}\,x_n \\ \frac{dx_2}{dt} \;&=\; a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 + \cdots + a_{2n}\,x_n \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dt} \;&=\; a_{n1}\,x_1 + a_{n2}\,x_2 + \cdots + a_{nn}\,x_n \end{aligned} \tag{8.17}$$

donde $a_1, a_2, \ldots, a_n$ son constantes reales dadas. Veremos que en muchos casos las soluciones de (8.17) son del tipo

$$u(t) \;=\; e^{k\,t}\,(A_1, A_2, \ldots, A_n) , \tag{8.18}$$

donde $k, A_1, A_2, \ldots, A_n$ son constantes reales.
Sustituyendo (8.18) en (8.17) obtenemos

$$\begin{aligned}
A_1\, ke^{k\,t} &= a_{11}\, A_1 e^{k\,t} + a_{12}\, A_2 e^{k\,t} + \ldots a_{1n}\, A_n e^{k\,t} \\
A_2\, ke^{k\,t} &= a_{21}\, A_1 e^{k\,t} + a_{22}\, A_2 e^{k\,t} + \ldots a_{2n}\, A_n e^{k\,t} \\
&\vdots \\
A_n\, ke^{k\,t} &= a_{n1}\, A_1 e^{k\,t} + a_{n2}\, A_2 e^{k\,t} + \ldots a_{nn}\, A_n e^{k\,t}
\end{aligned}$$

y dividiendo por $e^{k\,t}$ resulta el sistema lineal algebraico

$$\begin{aligned}
(a_{11} - k)\, A_1 + a_{12}\, A_2 + \ldots a_{1n}\, A_n &= 0 \\
a_{21}\, A_1 + (a_{22} - k)\, A_2 + \ldots a_{2n}\, A_n &= 0 \\
&\vdots \\
a_{n1}\, A_1 + a_{n2}\, A_2 + \ldots (a_{nn} - k)\, A_n &= 0
\end{aligned} \tag{8.19}$$

en las incógnitas $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Es claro que (8.19) admite la solución trivial $A_1 = A_2 = \cdots = A_n = 0$, que produce en (8.18) la solución nula o solución trivial de (8.17). Como queremos soluciones no triviales de (8.17) debemos imponer la condición de que el determinante del sistema sea nulo, es decir,

$$\begin{vmatrix} a_{11} - k & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - k & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - k \end{vmatrix} = 0\,.$$

Por lo tanto si

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

el número k debe un autovalor de la matriz A y el vector $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ debe ser un vector propio de A asociado al autovalor k.

Ejemplo 8.3.13. En el caso del sistema

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= x + y \\
\frac{dy}{dt} &= 4\,x - 2\,y
\end{aligned} \tag{8.20}$$

la correspondiente matriz es

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

Los autovalores son los λ que verifican

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ \\ 4 & -2-\lambda \end{vmatrix} \;=\; \lambda^2+\lambda-6 \;=\; (\lambda+3)\,(\lambda-2) \;=\; 0\,.$$

Luego los autovalores son $\lambda = -3$ y $\lambda = 2$. Para encontrar un vector propio asociado a $\lambda = -3$ debemos encontrar una solución no trivial del correspondiente sistema 8.19:

$$\begin{aligned} (1-(-3))\,A_1 + 1\,A_2 \;&=\; 0 \\ 4\,A_1 + (-2-(-3))\,A_2 \;&=\; 0 \end{aligned} \tag{8.21}$$

que se reduce a la ecuación

$$4\,A_1 \;+\; A_2 \;=\; 0\,.$$

Una solución sencilla no trivial de este sistema es $A_1 = 1$, $A_2 = -4$. Luego $u_1(t) = e^{-3\,t}\,(1,-4)$ es solución de nuestro sistema de ecuaciones diferenciales.
Correspondiente al otro autovalor, $\lambda = 2$, tenemos la ecuación

$$(1-2)\,A_1 \;+\; A_2 \;=\; -A_1 \;+\; A_2 \;=\; 0\,,$$

la solución no trivial $A_1 = 1$, $A_2 = 1$ y la solución $u_2(t) \;=\; e^{2\,t}\,(1,1)$.
De esta forma la solución general de nuestro sistema de ecuaciones diferenciales es

$$\begin{aligned} u(t) \;&=\; c_1\,u_1(t) \;+\; c_2\,u_2(t) \\ &=\; \left(c_1\,e^{-3\,t} \;+\; c_2\,e^{2\,t}, -4\,c_1\,e^{-3\,t} \;+\; c_2\,e^{2\,t}\right)\,,\; c_1, c_2 \in \mathbb{R}\,,\; t \in \mathbb{R}\,. \end{aligned}$$

Lemma 8.3.14. *Considere el sistema lineal homogéneo con coeficientes constantes 8.17 y la correspondiente matriz A.*

a) Si λ es autovalor real de A y v es vector propio de A asociado a λ, entonces $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ definida por $u(t) = e^{\lambda\,t}\,v$ es solución del sistema 8.17.

b) Si $\lambda = \alpha + \imath\,\beta$ con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\beta \neq 0$, es valor propio de A y los vectores v_1, v_2 son vectores propios linealmente independientes de A asociado a λ, entonces $u_1, u_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ definidas por $u_1(t) = e^{\alpha\,t}\,(\cos(\beta\,t)\,v_1 \;-\; sen(\beta\,t)\,v_2$ y $u_2(t) = e^{\alpha\,t}\,(sen(\beta\,t)\,v_1 \;+\; \cos(\beta\,t)\,v_2$ son soluciones linealmente independientes del sistema 8.17.

Demostración. Sea $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ la aplicación lineal definida por

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_n) \;=\; \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\,,$$

entonces el sistema es equivalente a la ecuación vectorial

$$\dot{x} \;=\; L(x)\,, \quad \text{donde} \quad x \;=\; (x_1, x_2, \ldots, x_n)\,.$$

a) Como $L(v) \;=\; \lambda\, v$, tenemos que

$$u'(t) \;=\; \lambda\, e^{\lambda\, t}\, v \;=\; L(e^{\lambda\, t}\, v) \;=\; L(u(t))\,.$$

b) Como

$$\begin{aligned} L(v_1) \;&=\; \alpha\, v_1 \;-\; \beta\, v_2 \\ L(v_2) \;&=\; \beta\, v_1 \;+\; \alpha\, v_2\,, \end{aligned}$$

tenemos que

$$\begin{aligned} u_1'(t) \;&=\; \alpha\, e^{\alpha\, t}\,(\cos(\beta\, t)\, v_1 \;-\; \operatorname{sen}(\beta\, t)\, v_2) \;+\; \beta\, e^{\alpha\, t}\,(-\operatorname{sen}(\beta\, t)\, v_1 \;-\; \cos(\beta\, t)\, v_2) \\ &=\; \alpha\, e^{\alpha\, t}\, \cos(\beta\, t)\, v_1 - \beta\, e^{\alpha\, t}\, \cos(\beta\, t)\, v_2 - \beta\, e^{\alpha\, t} \operatorname{sen}(\beta\, t)\, v_1 - \alpha\, e^{\alpha\, t} \operatorname{sen}(\beta\, t)\, v_2 \\ &=\; e^{\alpha\, t}\,[\cos(\beta\, t)\, L(v_1) \;-\; \operatorname{sen}(\beta\, t)\, L(v_2)] \\ &=\; L(e^{\alpha\, t}\,(\cos(\beta\, t)\, v_1 \;-\; \operatorname{sen}(\beta\, t)\, v_2)) \;=\; L(u_1(t))\,. \end{aligned}$$

Análogamente se demuestra que $u_2'(t) \;=\; L(u_2(t))$.

Ejemplo 8.3.15. Considere el sistema

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} \;&=\; 5\, x \;-\; 3\, y \\ \frac{dy}{dt} \;&=\; 6\, x \;-\; y \end{aligned} \tag{8.22}$$

La correspondiente matriz es

$$\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}.$$

Los autovalores son los λ que verifican

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & -3 \\ 6 & -1-\lambda \end{vmatrix} \;=\; \lambda^2 \;-\; 4\,\lambda + 13 \;=\; (\lambda-2)^2 \;+\; 9 \;=\; 0\,.$$

Luego los autovalores son $\lambda = 2 \pm 3\,\imath$.

Para calcular los vectores $v_1 = (A, B)$ y $v_2 = (C, D)$ que generan el correspondiente espacio propio, debemos resolver

$$\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 6 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \;=\; 2\, \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \;-\; 3\, \begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 6 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix}$$

que es equivalente al sistema

$$\begin{aligned} A + C - D &= 0 \\ 2A - B + D &= 0 \\ -A + C - D &= 0 \\ -B + 2C - D &= 0 \end{aligned}$$

cuyas soluciones son

$$A = 0\,, \quad B = C = D\,.$$

Poniendo $A = 0$ y $B = C = D = 1$, obtenemos las soluciones

$$\begin{aligned} u_1(t) &= e^{2t} \left(\cos(3t) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \operatorname{sen}(3t) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right), \\ u_2(t) &= e^{2t} \left(\operatorname{sen}(3t) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \cos(3t) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right), \end{aligned}$$

es decir

$$\begin{aligned} u_1(t) &= e^{2t} (-\operatorname{sen}(3t), \cos(3t) - \operatorname{sen}(3t))\,, \\ u_2(t) &= e^{2t} (\cos(3t), \operatorname{sen}(3t) + \cos(3t)\,. \end{aligned}$$

Luego la solución general es

$$u(t) = e^{2t} (-c_1 \operatorname{sen}(3t) + c_2 \cos(3t), (c_1 + c_2) \cos(3t) - (c_1 - c_2) \operatorname{sen}(3t))\,.$$

Ejercicio 8.3.16. Encuentre la solución general del sistema

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 5x - 3y + e^t \operatorname{sen}(3t) \\ \frac{dy}{dt} &= 6x - y - e^t \cos(3t)\,. \end{aligned}$$

Observación 8.3.17. Considere el sistema

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a_1 x + b_1 y \\ \\ \frac{dy}{dt} = a_2 x + b_2 y \end{cases} \tag{8.23}$$

y suponga que los autovalores λ_1 y λ_2 de la matriz $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$ son iguales, $\lambda_1 = \lambda_2 = m$. En este caso obtenemos sólo una solución de la forma

$$\begin{cases} x = Ae^{mt} \\ y = Be^{mt} \end{cases} \tag{8.24}$$

y debemos buscar una segunda solución de la forma

$$x = (A_1 + A_2 t)e^{mt}\,, \quad y = (B_1 + B_2 t)e^{mt}\,. \tag{8.25}$$

De esta manera la solución general es

$$\begin{cases} x = c_1 A e^{mt} + c_2(A_1 + A_2 t)e^{mt} \\ y = c_1 B e^{mt} + c_2(B_1 + B_2 t)e^{mt} \end{cases} \tag{8.26}$$

Las constantes A_1, A_2, B_1 y B_2 se hallan sustituyendo (8.25) en el sistema (8.23).

La únca excepción a esta afirmación ocurre cuando $a_1 = b_2 = a$ y $a_2 = b_1 = 0$, de modo que la ecuación auxiliar es $m^2 - 2am + a^2 = 0$, $m = a$, y las constantes A y B en (8.24) quedan libres. En tal situación, la solución general de (8.23) es obviamente

$$\begin{cases} x = c_1 e^{mt} \\ y = c_2 e^{mt}, \end{cases}$$

y se dice que el sistema esta *desacoplado* (ya que cada ecuación puede resolverse independientemente una de la otra).

Ejemplo 8.3.18. Considere el sistema

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 3\,x \;-\; y \\ \frac{dy}{dt} &= x \;+\; 5\,y \end{aligned} \tag{8.27}$$

La correspondiente matriz es

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Los autovalores son los λ que verifican

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 \\ 1 & 5-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 8\,\lambda + 16 \;=\; (\lambda-4)^2 \;=\; 0\,.$$

Luego el único autovalor es $\lambda = 4$.

Para encontrar un vector propio asociado al autovalor $\lambda = 4$ debemos resolver el sistema

$$\begin{aligned} 3\,A_1 \;-\; A_2 &= 4\,A_1 \\ A_1 \;+\; 5\,A_2 &= 4\,A_2 \end{aligned}$$

que se reduce a

$$A_1 \;+\; A_2 \;=\; 0\,.$$

Por lo tanto tenemos la solución

$$u_1(t) \;=\; e^{4t}\,(1,-1)\,.$$

Como no hay más autovalores, buscamos otra solución $u_2(t)$ linealmente independiente con $u_1(t)$ de la forma

$$u_2(t) \;=\; (x(t), y(t)) \;=\; e^{4t}\,(A_1 \;+\; A_2\,t, B_1 \;+\; B_2\,t)\,.$$

Entonces

$$u_2'(t) \;=\; e^{4t}\,(4\,A_1 + A_2 + 4\,A_2\,t, 4\,B_1 + B_2 + 4\,B_2\,t)\,,$$

y

$$\begin{aligned} -3\,x(t) \;-\; y(t) \;&=\; e^{4t}\,(3\,A_1 \;-\; B_1 \;+\; (3\,A_2 \;-\; B_2)\,t)\,,\\ x(t) \;+\; 5\,y(t) \;&=\; e^{4t}\,(A_1 \;+\; 5\,B_1 \;+\; (A_2 \;+\; 5\,B_2)\,t)\,. \end{aligned}$$

Por lo tanto debemos tener

$$\begin{aligned} 4\,A_1 + A_2 + 4\,A_2\,t \;&=\; 3\,A_1 \;-\; B_1 \;+\; (3\,A_2 \;-\; B_2)\,t\,,\\ 4\,B_1 + B_2 + 4\,B_2\,t \;&=\; A_1 \;+\; 5\,B_1 \;+\; (A_2 \;+\; 5\,B_2)\,t\,, \end{aligned}$$

que es equivalente a

$$\begin{aligned} A_1 + A_2 + B_1 \;+\; (A_2 + B_2)\,t \;&=\; 0\,,\\ -A_1 - B_1 + B_2 \;-\; (A_2 + B_2)\,t \;&=\; 0\,. \end{aligned}$$

Luego

$$B_2 \;=\; -A_2\,, \quad B_1 \;=\; -A_1 \;-\; A_2\,.$$

Elijiendo $A_1 = 0$, $A_2 = 1$, $B_1 = B_2 = 1$, obtenemos

$$u_2(t) \;=\; e^{4t}\,(t, -1 - t)\,.$$

Así la solución general es

$$u(t) \;=\; c_1\,u_1(t) \;+\; c_2\,u_2(t) \;=\; e^{4t}\,(c_1 \;+\; c_2\,t, -c_1 \;-\; c_2\,(1 + t))\,.$$

Ejercicio 8.3.19. *Encuentre la solución general del sistema*

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} \;&=\; 3\,x \;-\; y \;+\; e^{2t}\\ \frac{dy}{dt} \;&=\; x \;+\; 5\,y \;+\; t \;-\; e^{2t} \end{aligned} \tag{8.28}$$